*Prof. Werner M. Seiler*
*Mario Albert*

*17. Dezember 2014*

*Institut für Mathematik*
*Fachbereich 10*
*Universität Kassel*

# Algebraische Geometrie II

Blatt 9

## Aufgabe 1

Seien $S$ ein Schema und $X, Y, Z$ beliebige $S$-Schemata. Zeige, dass folgende Isomorphien gelten:

a) $X \times_S S \cong X$,

b) $X \times_S Y \cong Y \times_S X$,

c) $(X \times_S Y) \times_S Z \cong X \times_S (Y \times_S Z)$.

## Aufgabe 2

Seien $S$ ein Schema, $X, X', Y, Y'$ $S$-Schemata

a) Seien $\varphi : X \to X'$, $\psi : Y \to Y'$ $S$-Morphismen. Zeige, dass dann genau ein $S$-Morphismus $\varphi \times \psi : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ existiert, so dass

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] & X' \\
X \times_S Y \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\varphi\times\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & X' \times_S Y' \arrow[u, "\alpha'"'] \arrow[d, "\beta'"] \\
Y \arrow[r, "\psi"] & Y'
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

b) Seien $\iota : U \hookrightarrow X$, $\kappa : V \hookrightarrow Y$ offene Unterschemata. Zeige, dass

$$\iota \times \kappa : U \times_S V \to X \times_S Y$$

einen Isomorphismus von $U \times_S V$ auf das offene Unterschemata $\alpha^{-1}(U) \cup \beta^{-1}(V) \subseteq X \times_S Y$ induziert ($\alpha : X \times_S Y \to X$ und $\beta : X \times_S Y \to Y$).

## Aufgabe 3  Weihnachtsaufgabe Teil 1

Seien $X$ ein Schema, $R$ ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Weiterhin sei $f : \operatorname{Spec}(R) \to X$ ein Schemamorphismus und $x \in X$ das Bild des abgeschlossenen Punktes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(R)$. Dann erhalten wir einen lokalen Ringhomomorphismus

$$f^{\#} : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R),\mathfrak{m}} = R.$$

a) Zeige das obige Konstruktion eine Bijektion zwischen den Morphismen $\operatorname{Spec}(R) \to X$ und den Paaren $(x, \varphi)$ darstellt. Hierbei ist $x \in X$ und $\varphi$ ein lokaler Homomorphismus $\varphi : \mathcal{O}_{X,x} \to R$.

Als Spezialfall der obigen Aussage erhalten wir für jeden Punkt $x$ des Schemas $X$ einen kanonischen Morphismus $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X$, welcher mit der Identitätsabbildung auf $\mathcal{O}_{X,x}$ korrespondiert.

Wir können die obige Aussage auf folgende Art und Weise umformulieren: Für jeden Morphismus $f : \operatorname{Spec}(R) \to X$ existiert ein $x \in X$, so dass $f$ durch $\operatorname{Spec}(R) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X$ faktorisiert wird. Hierbei wird der erste Teil durch den lokalen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \to R$ induziert.

Haben wir zusätzlich einen Schemamorphismus $f : X \to S$ und einen Punkt $x \in X$ der auf einen Punkt $s \in S$ abbildet so erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \arrow[r] & S \end{tikzcd} .$$

Hierbei korrespondiert die linke vertikale Abbildung mit dem lokalen Ringhomomorphismus $f_x^{\#} : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{S,s}$.

b) Seien $x, x' \in X$ Punkte von $X$. Zeige, dass $x \in \overline{\{x'\}}$ genau dann wenn $x'$ im Bild des kanonischen Morphismus $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ ist.

c) Zeige, dass sich Punkte von $X$ mit Äquivalenzklassen von Morphismen von Spektren von Körpern nach X identifizieren lassen. Weiterhin enthält jede Äquivalenzklasse ein kleinstes Element (Tipp: Nutze den Restklassenkörper von Blatt 5).

## Aufgabe 4 Weihnachtsaufgabe Teil 2

Seien $S$ ein Schema und $X, Y$ zwei $S$-Schemata mit den Strukturmorphismen $f : X \to S$ und $g : Y \to S$. Zeige, dass die Punkte $z$ aus $X \times_S Y$ sich mit dem 4-Tupel $(x, y, s, P)$ identifizieren lassen. Hierbei sind $x \in X$, $y \in Y$, $s \in S$ mit $f(x) = s$, $g(y) = s$ und $P$ ist ein Primideal des Ringes $\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y)$ ($\kappa(\bullet)$ ist der Restklassenkörper der auf Blatt 5 eingeführt wurde).