Fachbereich Mathematik und Informatik **SoSe 2006**
Prof. Dr. Andreas Meister
Fil. mag. Philipp Birken

Numerik I

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1
Für welche reellen Werte α und β besitzt das System

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & \alpha x_4 & = & \beta \end{array}$$

a) eine eindeutige Lösung (man berechne diese),

b) mehrere Lösungen (man gebe die allgemeine Lösung an),

c) keine Lösung.

d) Man bestimme die Determinante der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$.

(4 P)

Aufgabe 2

a) Welche der im folgenden gegebenen Vektoren sind linear abhängig?

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 28 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \\ 25 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Man bestimme das $\alpha \in \mathbb{R}$, für das die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Für dieses α stelle man $\boldsymbol{v}_j \quad (j = 1, 2, 3)$ jeweils als Linearkombination der anderen Vektoren $\boldsymbol{v}_k \quad (k \neq j)$ dar.

(4 P)

Aufgabe 3
Für die Normen $\|.\|_1, \|.\|_2$ und $\|.\|_\infty$ des $\mathbb{R}^n$ bestimme man die größten Zahlen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und die kleinsten Zahlen $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$a_1\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq b_1\|\boldsymbol{x}\|_2$$

und

$$a_2\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq b_2\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Hinweis: Man verwende die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung! (4 P)

Abgabe: Dienstag, 25.4.2006 vor der Vorlesung