Fachbereich Mathematik und Informatik **SoSe 2006**
Prof. Dr. Andreas Meister
Dr. Philipp Birken

Numerik I

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A^\dagger$ die Pseudoinverse von A. Beweisen Sie:

i) Die Singulärwerte von A sind eindeutig bestimmt.

ii) Es gilt: $AA^\dagger A = A$, $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$, $(AA^\dagger)^T = AA^\dagger$ und $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$.

iii) $AA^\dagger : \mathbb{R}^n \to Bild(A)$ und $A^\dagger A : \mathbb{R}^n \to Bild(A^T)$ sind orthogonale Projektionen.

(4 P)

Aufgabe 2
Beweisen Sie folgendes Störungslemma für lineare Ausgleichsprobleme. Die Aussagen aus Aufgabe 1 dürfen hierbei ohne Beweis verwendet werden.

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ sowie $b, \Delta b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Seien x bzw. $x + \Delta x$ die eindeutigen Lösungen minimaler euklidischer Norm der linearen Ausgleichsprobleme zu den Daten (A, b) bzw. $(A, b + \Delta b)$. Dann ist

$$\|\Delta x\|_2 \leq \|A^\dagger\| \|P_{Bild(A)}\Delta b\|_2, \qquad \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A)\frac{\|P_{Bild(A)}\Delta b\|_2}{\|P_{Bild(A)}b\|_2}$$

(4 P)

Aufgabe 3
Gegeben sei die Funktion

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{g} \quad \text{mit } g = f'(x_0)\,.$$

Das im folgenden betrachtete Iterationsverfahren zur Bestimmung von x_* mit $f(x_*) = 0$ sei durch

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

definiert. Man leite mit Hilfe von (sinnvoll abgebrochenen) Taylor-Entwicklungen eine Konvergenzaussage ab. Dabei stelle man gegebenenfalls zusätzlich benötigte Bedingungen auf, die die Konvergenz des Verfahrens gewährleisten. (4 P)

Abgabe: **Dienstag, 4.7.2004 vor der Vorlesung**