

Numerik I

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1

- a) Zeigen Sie für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine orthogonale Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\|\mathbf{QA}\|_2 = \|\mathbf{AQ}\|_2 = \|\mathbf{A}\|.$$

- b) Beweisen Sie für eine orthogonale Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine invertierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\text{cond}_2(\mathbf{QA}) = \text{cond}_2(\mathbf{A})$.
- c) Zeigen Sie: mit $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1$ ist die Matrix $\mathbf{H} := \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n \geq 2$) orthogonal. Solche Matrizen heißen Householder-Transformationen, nach Alston Scott Householder (1904-1993).

(4 P)

Aufgabe 2

- a) Lösen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- b) Bringen Sie die Matrix \mathbf{A} durch Anwendung einer Householder-Transformation auf obere Dreiecksgestalt. Wählen sie hierzu $\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 + \text{sgn}(a_{11})\|\mathbf{a}_1\|_2 \mathbf{e}_1$. Machen Sie eine Zeichnung, die die Spalten der Matrix vor und nach der Transformation sowie Spiegelungsvektor und -gerade enthält.

(4 P)

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Jede Tridiagonalmatrix ist konsistent geordnet.

(4 P)

Aufgabe 4

Programmieren Sie das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren. Erstellen Sie dazu zwei Dateien NAMEjacobi.m und NAMEgaussseidel.m, in denen Sie je eine Funktion function jacobi(A, x, b, maxit) bzw. function gaussseidel(A, x, b, maxit) schreiben. Berechnen Sie in jedem Schritt die folgenden Indikatoren:

- Das relative Residuum $\|\mathbf{Ax}_i - \mathbf{b}\|/\|\mathbf{Ax}_0 - \mathbf{b}\|$.

- Die Norm des Fehlers (hierzu anfangs die Lösung ausrechnen)
- Den Abstand der beiden letzten Folgenglieder: $\|\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_m\|$

Speichern Sie die Indikatoren jeweils in einem Vektor und plotten Sie diese nach Ablauf der Iteration. Der Befehl `plot(y)` erstellt einen Plot des Vektors \mathbf{y} , wobei auf der x-Achse die Indizes der Vektoreinträge stehen. Berechnen Sie mit beiden Verfahren die Näherungslösungen zu den Beispielen

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} a & 14 \\ 7 & 50 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \left\{ \frac{49}{25} \right\}.$$

Verwenden Sie jeweils den Startvektor $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $a = \frac{1}{2}, 1, 2, 10, 100$. Erstellen Sie hierzu eine Datei `NAMEblatt6.m`, die die anderen Funktionen mehrmals aufruft. Abzugeben sind das gut kommentierte Programm, Ihre Kommentare zu den Plots (was können Sie aus der Ausgabe schließen?) sowie im Fall von Divergenz eine mathematisch fundierte Begründung für diese. (8 P)

Abgabe: Dienstag, 30.5.2004 vor der Vorlesung