Arbeitsgebiet und Forschungsinteressen

Mein Arbeitsgebiet ist die algebraische Zahlentheorie, die heute in vielfältiger Weise von der arithmetischen Geometrie beeinflußt wird. Die häufig sehr allgemein formulierten Vermutungen der arithmetischen Geometrie führen in Spezialfällen oft zu Problemstellungen, für die die klassische Zahlentheorie mögliche Beweisstrategien bereitstellt.

Daneben ist es mir stets ein Anliegen, für unbewiesene Vermutungen numerisches Beispielmaterial bereitzustellen. Die Methoden stammen hier aus der algorithmischen Zahlentheorie und umfassen sowohl die Entwicklung, als auch die Implementierung von neuen Algorithmen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen möchte ich nun konkrete kurz-und mittelfristige Ziele skizzieren. Ausgangspunkt für meine derzeitigen und geplanten Forschungsvorhaben sind die sogenannten äquivarianten Tamagawazahlvermutungen von Burns und Flach, die ich im folgenden kurz erläutern möchte. Sei dazu K ein Zahlkörper und X eine glatte, projektive, über K definierte Varietät. Häufig wirkt auf X eine halb-einfache endlich-dimensionale $\mathbb{Q}$-Algebra A. Beispiele hierfür sind etwa

- $X = X' \times_{\mathrm{spec}(K)} \mathrm{spec}(L)$, L/K Galoissch mit Gruppe G, $A = \mathbb{Q}[G]$
- X eine elliptische Kurve (oder allgemeiner eine abelsche Varietät), $A = \mathrm{End}(X) \otimes \mathbb{Q}$

Meine weiteren Ausführungen beziehen sich nur auf das erste Beispiel. Unter Benutzung der kohomologischen Methoden von Bloch, Kato, Fontaine und Perrin-Riou haben Burns und Flach zu jedem Motiv $M = h^n(X)(r)$, das gewisse, allgemein akzeptierte Vermutungen erfüllt, ein kanonisches Element $T\Omega(L/K, M)$ in der relativen Grothendieckgruppe $K_0(\mathbb{Z}[G], \mathbb{R})$ konstruiert. Die zentrale Vermutung in diesem Kontext, die sogenannte "Equivariant Tamagawa Number Conjecture" (im folgenden mit ETNC abgekürzt), lautet nun: $T\Omega(L/K, M) = 0$. Das Wort "equivariant" erklärt sich hier durch die Berücksichtigung der Wirkung von A in der Konstruktion von $T\Omega(L/K, M)$.

Grob gesagt stellt ETNC eine arithmetisch-algebraische Beschreibung von Werten motivischer L-Reihen an den ganzzahligen Stellen dar. Um die Bedeutung dieser sehr allgemeinen Vermutung zu unterstreichen, sei auf zwei Spezialfälle hingewiesen. Im Fall der Tatemotive $h^0(\mathrm{spec}(L))(r)$, $r \in \mathbb{Z}$, kann man $T\Omega(L/K, M)$ ohne die Annahme bisher unbewiesener Vermutungen definieren. Selbst für $r = 0$ sind schon schwache Formen von ETNC äquivalent zu klassischen Vermutungen der algebraischen Zahlentheorie. So ist zum Beispiel $T\Omega(L/K, h^0(\mathrm{spec}(L)))$ dann und nur dann in der Untergruppe $K_0(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Q})$ von $K_0(\mathbb{Z}[G], \mathbb{R})$ enthalten, wenn die Starksche Vermutung für L/K gilt.

Falls $X = E$ eine über $\mathbb{Q}$ definierte elliptische Kurve ist und $M = h^1(E)(1)$, so ist ETNC äquivalent zur Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer. Falls E zusätzlich komplexe Multiplikation hat, so ist ETNC tatsächlich äquivalent zur feineren Vermutung von Gross.

Das bedeutendste Resultat der letzten Jahre in diesem Zusammenhang stammt von Burns und Greither. Sie beweisen ETNC für die Tatemotive $M = h^0(\mathrm{spec}(L))(r), r \leq 0$, für $K = \mathbb{Q}$ und $L/\mathbb{Q}$ abelsch von ungeradem Führer. Es wird erwartet, daß die ETNC für $h^0(\mathrm{spec}(L))(r)$ und $h^0(\mathrm{spec}(L))(1-r)$ kompatibel mit der Funktionalgleichung Artinscher L-Reihen sind. Im obigem Spezialfall ($K = \mathbb{Q}, L/\mathbb{Q}$ abelsch von ungeradem Führer) ist diese Kompatibilitätsvermutung in einer bislang unveröffentlichten Arbeit von Burns und Flach bewiesen, so daß hier ETNC tatsächlich für alle $r \in \mathbb{N}$ gezeigt ist.

Darüber hinaus ist die Korrektheit von ETNC nur noch in wenigen Spezialfällen bekannt. Daher verfolge ich zur Zeit die folgenden Ziele:

1. Beweis von ETNC für die Tatemotive $h^0(\mathrm{spec}(L))(r), r \in \mathbb{Z}$, wobei L/K eine abelsche Erweiterung eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers K ist. Dies beinhaltet auch den Beweis der erwähnten Kompatibilitätsvermutung. Grundsätzlich sollte hier eine ähnliche Vorgehensweise wie bei Burns und Greither möglich sein, da man wie im absolut-abelschen über explizite Einheiten (zyklotomische bzw. elliptische Einheiten) verfügt.

2. Im Spezialfall der Tatemotive gibt es neben den erwähnten Resultaten nur noch Ergebnisse für sehr spezielle Erweiterungen $L/\mathbb{Q}$ mit Quaternionengruppe Q_8. Es ist daher von besonderem Interesse numerisches Beispielmaterial bereitzustellen, einerseits um weitere, vor allem auch nicht-abelsche, Evidenz für ETNC zu haben, andererseits aber auch wegen der Methoden und Algorithmen, die hierzu zu entwickeln sind.

Beide Ziele führen direkt zu Projekten, die völlig unabhängig von ETNC von Interesse sind. Die Strategie zum Beweis von ETNC für abelsche Erweiterungen eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers führt direkt zu zentralen Fagestellungen in der Iwasawatheorie. In der Arbeit von Burns und Greither wird ETNC zurückgeführt auf die Hauptvermutung der Iwasawatheorie (bewiesen von Mazur/Wiles und Greither) und eine Aussage vom Typ $\mu = 0$ (bewiesen von Ferrero/Washington). Ersetzt man $\mathbb{Q}$ durch einen imaginär-quadratischen Grundkörper, so ist die Hauptvermutung nur im halb-einfachen Fall bewiesen (Rubin), $\mu = 0$ ist nur für Primzahlen p, die in $K/\mathbb{Q}$ zerlegt sind, bekannt (Gillard, Schneps).

Beschäftgt man sich aus algorithmischer Sicht mit ETNC, so stellt sich sehr schnell die grundlegende Frage: Kann man in der relativen Grothendieckgruppe $K_0(\mathbb{Z}[G], \mathbb{R})$ rechnen? Für abelsche Gruppen ist dies weitgehend durch eine gemeinsame mit Arbeit mit M. Endres gelöst, für beliebige Gruppen führt dies direkt in die algorithmische K-Theorie. Konkret stellt sich die Frage nach Algorithmen zur

- Berechnung von lokal freien Klassengruppen von Gruppenringen,
- Berechnung von K_1 von endlichen semilokalen Ringen der Form $\mathbb{Z}[G]/I$, wobei I ein (zweiseitiges) Ideal in $\mathbb{Z}[G]$ ist,
- Berechnung der Torsionsuntergruppe von $K_0(\mathbb{Z}[G], \mathbb{R})$.
- Lösung des diskreten Logarithmenproblems in diesen endlichen, abelschen Gruppen.

Hierzu werden im Moment unter Verwendung von MAGMA Funktionen zum Rechnen in Gruppenringen entwickelt und implementiert. Hierunter fällt zum Beispiel auch die folgende explizite Problemstellung: Berechne zu gegebener endlicher Gruppe G eine (alle) Maximalordnungen $\mathcal{M}$ in $\mathbb{Q}[G]$ mit $\mathbb{Z}[G] \subseteq \mathcal{M}$.