

Galoisgruppen additiver Polynome

Prof. Dr. B. Heinrich Matzat, Universität Heidelberg

Endliche Galoiserweiterungen L über einem Körper K in positiver Charakteristik p können durch Nullstellen von Polynomen der Form $f = \sum_{i=0}^n a_i X^{p^i} \in K[X]$ erzeugt werden. Solche Polynome heißen additive Polynome und sind dadurch gekennzeichnet, dass deren Nullstellen einen Vektorraum über \mathbb{F}_p bilden. Dann operiert die Galoisgruppe $\text{Gal}(L/K)$ linear auf diesen Vektorraum und besitzt damit eine treue lineare Darstellung in $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

Additive Polynome kann man auch als charakteristische Polynome zyklischer Frobeniusmoduln erhalten, die eine gewisse Verwandtschaft zu Differentialmoduln besitzen. Diese Analogie wird benutzt, um mittels vorgegebener Darstellungsmatrizen für den Frobeniusendomorphismus additive Polynome zu konstruieren, deren Galoisgruppe unterhalb einer vorgegebenen oberen Schranke liegen. Untere Schranken kann man durch ein Analogon des Dedekind–Kriteriums für lineare Darstellungen erhalten.

Ich erwarte, dass man mit dieser Technik für viele (zusammenhängende) lineare Gruppen über endlichen Körpern additive Polynome konstruieren kann. Zum Beispiel wurden hiermit von G. Malle erstmalig Polynome über $\mathbb{F}_q(t)$ mit der Dickson–Gruppe $G_2(q)$ als Galoisgruppe konstruiert.

Literatur:

- G. Malle: Explicit realization of the Dickson groups $G_2(q)$ as Galois groups. Preprint, Kassel 2002.
- B. H. Matzat: Frobenius modules and Galois groups. Preprint, Heidelberg 2002.