Involutive Basen

Werner M. Seiler

Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen

Universität Heidelberg

(www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/compalg/seiler)

Überblick

- Spezielle Art nicht reduzierter Gröbner-Basen
- Definiert bezüglich einer Termordnung und einer *involutiven Division*
- Bereits im monomialen Fall nicht trivial
- **Idee:** Generatoren nur mit Polynomen in ihren *multiplikativen Variablen* multiplizieren
- Nützliche Alternative zum klassischen Buchberger-Algorithmus
- Zusätzliche kombinatorische Eigenschaften
- **Strukturanalyse polynomialer Module mit Pommaret-Basen**

Pommaret-Basen

- Pommaret-Division
  - Exponentenvektor $\mu = [0, \dots, 0, \mu_k, \dots, \mu_n]$
    $\Longrightarrow \quad \operatorname{cls}\mu = k$ (Klasse)
  - Multiplikative Variablen für x^μ: $x_1, \dots, x_k$
  - *Globale* Division (Definition unabhängig von gegebenen Termen)
- Besondere Beziehung zu `degrevlex`: einzige klassenrespektierende Ordnung
- Pommaret-Division *nicht* Noethersch!
  Basen existieren nur in δ-regulären Variablen (generische Koordinaten sind δ-regulär)

Stanley-Zerlegungen

- Zerlegung von (homogenem) polynomialem Modul M in direkte Summe *freier* polynomialer Module
  - Vektorraumisomorphismus (gradiert)

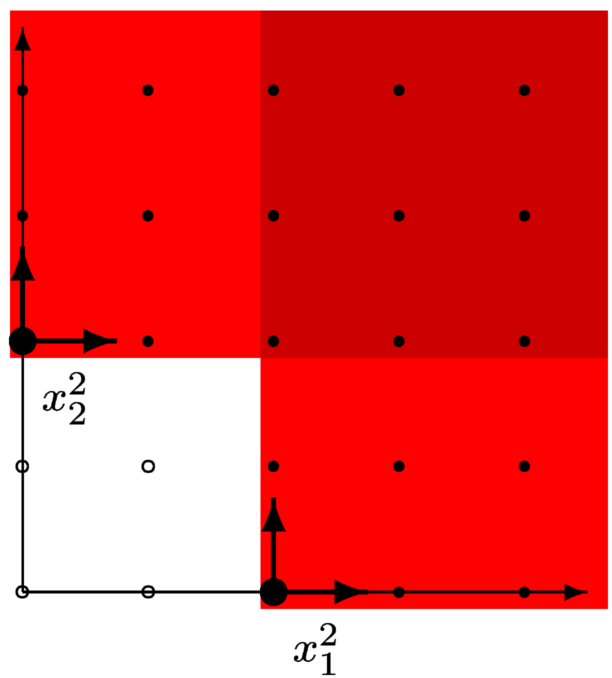
$$M \cong \bigoplus_{\alpha} \mathbb{k}[X_\alpha] \cdot \eta_\alpha$$

  - Liefert sofort *Hilbert-Reihe*

$$\mathcal{H}_M(\lambda) = \sum_{\alpha} \frac{\lambda^{\deg \eta_\alpha}}{(1-\lambda)^{|X_\alpha|}}$$

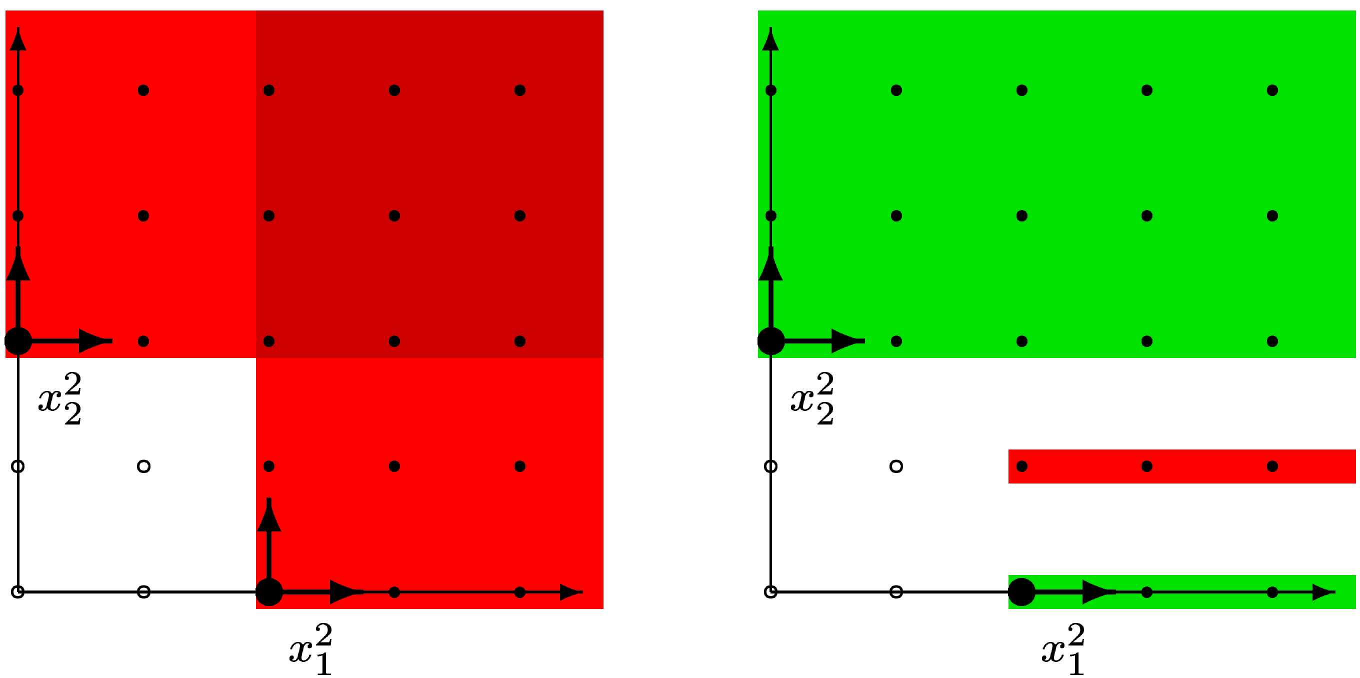
Stanley-Zerlegungen

- Zerlegung von (homogenem) polynomialem Modul M in direkte Summe *freier* polynomialer Module
- Jede involutive Basis gibt Zerlegung für Untermodul M eines freien Moduls



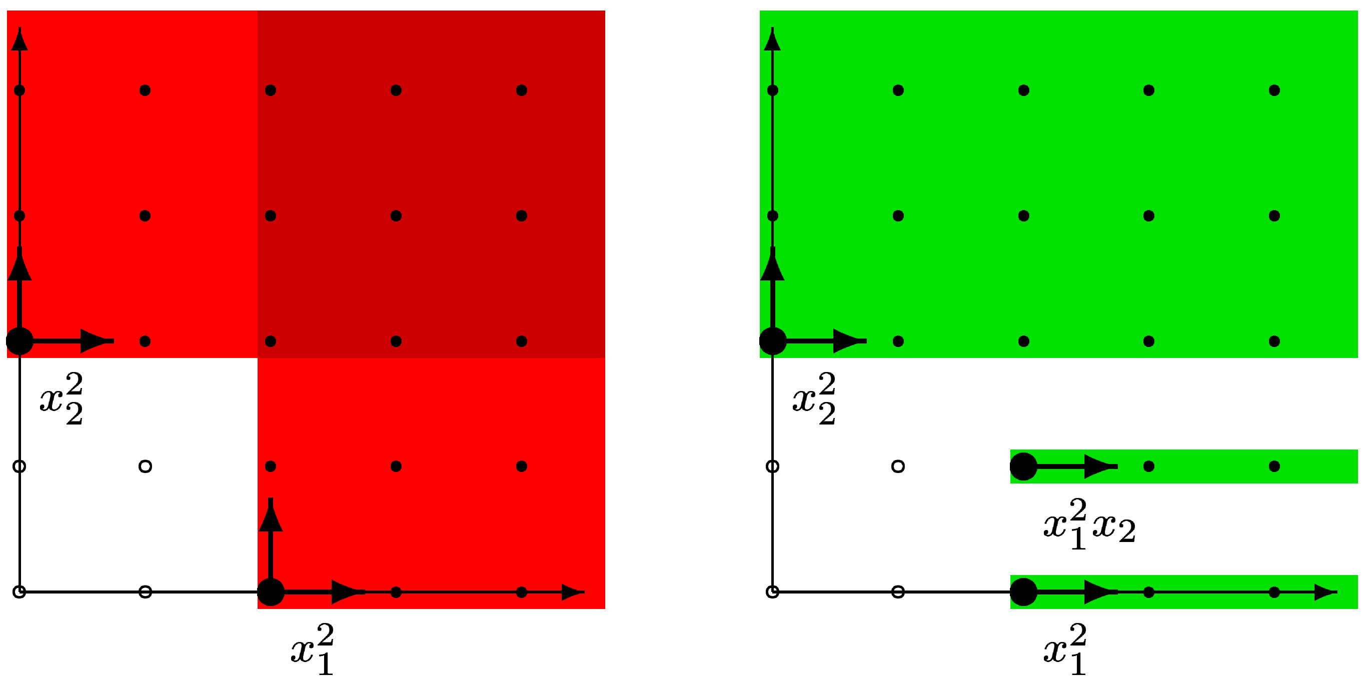
Stanley-Zerlegungen

- Zerlegung von (homogenem) polynomialem Modul M in direkte Summe *freier* polynomialer Module
- Jede involutive Basis gibt Zerlegung für Untermodul M eines freien Moduls



Stanley-Zerlegungen

- Zerlegung von (homogenem) polynomialem Modul M in direkte Summe *freier* polynomialer Module
- Jede involutive Basis gibt Zerlegung für Untermodul M eines freien Moduls



Stanley-Zerlegungen

- Zerlegung von (homogenem) polynomialem Modul M in direkte Summe *freier* polynomialer Module
- Jede involutive Basis gibt Zerlegung für Untermodul M eines freien Moduls
- Schwieriger: *komplementäre Zerlegung*
  - Zerlegung des Faktormoduls $M = P^r/N$
  - Rekursiver Algorithmus für Gröbner-Basen
  - Direkter Algorithmus für Janet-Basen
  - Elementar für Pommaret-Basen

Stanley-Zerlegungen

- Zerlegung von (homogenem) polynomialem Modul M in direkte Summe *freier* polynomialer Module
- Jede involutive Basis gibt Zerlegung für Untermodul M eines freien Moduls
- Schwieriger: *komplementäre Zerlegung*
- Pommaret-Basis liefert *Rees-Zerlegung*
  - $X_\alpha = \{x_1, x_2, \dots, x_{\operatorname{cls}\eta_\alpha}\}$
  - Auch komplementäre Rees-Zerlegung
  - *Hironaka-Kriterium* für Cohen-Macaulay-Module: $\operatorname{cls}\eta_\alpha = d = Const$

Dimension und Tiefe

- Hilbert-Reihe $\Longrightarrow$ *Krull-Dimension*
  - Berechenbar mit jeder Stanley-Zerlegung
  - Pommaret-Basis H vom Grad q

$$\dim I = \min\left\{i \mid \langle H, x_1, \dots, x_i\rangle_q = (\mathbb{k}[X])_q\right\}$$

Dimension und Tiefe

- Hilbert-Reihe $\Longrightarrow$ *Krull-Dimension*
- Alternativer Zugang via unabhängigen Mengen (Gröbner, Kredel/Weispfenning)
  - (Stark) unabhängige Menge $X' \subseteq X$ von Variablen modulo Ideal I

$$I \cap \Bbbk[X'] = \{0\} \text{ bzw. } \operatorname{lt}_{\prec} I \cap \Bbbk[X'] = \{0\}$$

Dimension und Tiefe

- Hilbert-Reihe $\Longrightarrow$ *Krull-Dimension*
- Alternativer Zugang via unabhängigen Mengen (Gröbner, Kredel/Weispfenning)
  - (Stark) unabhängige Menge $X' \subseteq X$ von Variablen modulo Ideal I
  - Krull-Dimension $\Longleftrightarrow$ maximale Kardinalität (stark) unabhängiger Menge

$$\dim I = D = \max |X'|$$

Dimension und Tiefe

- Hilbert-Reihe $\Longrightarrow$ *Krull-Dimension*
- Alternativer Zugang via unabhängigen Mengen (Gröbner, Kredel/Weispfenning)
  - (Stark) unabhängige Menge $X' \subseteq X$ von Variablen modulo Ideal I
  - Krull-Dimension $\Longleftrightarrow$ maximale Kardinalität (stark) unabhängiger Menge
  - In δ-regulären Variablen: $X' = \{x_1, \dots, x_D\}$ maximale stark unabhängige Menge

Dimension und Tiefe

- Hilbert-Reihe $\Longrightarrow$ *Krull-Dimension*
- Alternativer Zugang via unabhängigen Mengen (Gröbner, Kredel/Weispfenning)
- Anderes Maß für Größe: *Tiefe*
  - M-reguläre Folge $(y_1, \dots, y_\ell) \subset \Bbbk[X]$
    y_{k+1} kein Nullteiler in $M/\langle y_1, \dots, y_k\rangle M$
  - Tiefe: maximale Länge M-regulärer Folge
  - d minimale Klasse in Pommaret-Basis $H \Longrightarrow$ $(x_1, \dots, x_d)$ maximale $\langle H\rangle$-reguläre Folge
  - Untermodul: $\operatorname{depth}(\langle H\rangle) = d$
    Faktormodul: $\operatorname{depth}(\Bbbk[X]^r/\langle H\rangle) = d - 1$

Schreyer-Theorem

- Klassisches Schreyer-Theorem
  - Standarddarstellung der S-Polynome
  - Spezielle Termordnung induziert durch Basis
  - Gröbner-Basis des Syzygienmoduls

Schreyer-Theorem

- Klassisches Schreyer-Theorem
- Allgemeine involutive Basen
  - Involutive Standarddarstellung der nichtmultiplikativen Vielfachen
  - Gleiche Termordnung wie klassisch
  - *Gröbner-Basis* des Syzygienmoduls
  - Korollar zu Buchbergers zweitem Kriterium

Schreyer-Theorem

- Klassisches Schreyer-Theorem
- Allgemeine involutive Basen
- Involutives Schreyer-Theorem
  - Nur für Pommaret-Basen
  - *Pommaret-Basis* des Syzygienmoduls
  - Wesentlich: Kontrolle der Leitterme

Schreyer-Theorem

- Klassisches Schreyer-Theorem
- Allgemeine involutive Basen
- Involutives Schreyer-Theorem
- Syzygienauflösung aus Pommaret-Basis
  - Iteration liefert freie Auflösung
  - Länge der Auflösung und Ränge der enthaltenen Module *ohne* weitere Rechnungen
  - Verschärfung von Hilberts Syzygientheorem
  - Im allgemeinen keine minimale Auflösung
  - Minimale Länge $\iff$ *projektive Dimension* (Auslander-Buchsbaum-Theorem)

Schreyer-Theorem

- Klassisches Schreyer-Theorem
- Allgemeine involutive Basen
- Involutives Schreyer-Theorem
- Syzygienauflösung aus Pommaret-Basis
- Spezialfall: monomialer Modul
  - Minimale Auflösung für stabile Module (Eliahou-Kervaire)
  - Explizite Formel für Differential
  - Komplex ist Differentialalgebra
  - Explizite Formel für *Betti-Zahlen*
  - Konstruktiver Beweis des Auslander-Buchsbaum-Theorems

Regularität

- q-Regularität
  - I wird erzeugt in Grad $\leq q$
  - $\mathrm{Syz}_j(I)$ wird erzeugt in Grad $\leq q + j$
  - $I_{\geq q}$ besitzt *lineare* freie Auflösung
  - $\exists\, y_1, \dots, y_d \in (\Bbbk[X])_1$ so daß

$$\bigl(\langle I, y_1, \dots, y_{k-1}\rangle : y_k\bigr)_q = \langle I, y_1, \dots, y_{k-1}\rangle_q$$

$$\langle I, y_1, \dots, y_d\rangle_q = (\Bbbk[X])_q$$

Regularität

- q-Regularität
- Castelnuovo-Mumford-Regularität
  - $\operatorname{reg} I = \min \{q \mid I\ q\text{-regulär}\}$
  - Kohomologisches Konzept
  - Wichtiges Maß für *Komplexität*:
    für jede Gröbner-Basis G $\quad \deg G \geq \operatorname{reg} I$
    (in generischen Variablen)
  - H Pommaret-Basis für `degrevlex` $\Longrightarrow$

$$\deg H = \operatorname{reg} I$$

Regularität

- q-Regularität
- Castelnuovo-Mumford-Regularität
- Alternative (homologische) Charakterisierung:

  Multiplikation mit x_{i+1}

$$m_{i+1} : I_{r+1}/\langle x_1, \dots, x_i\rangle I_r \longrightarrow I_{r+2}/\langle x_1, \dots, x_i\rangle I_{r+1}$$

  ist injektiv für alle $r \geq \operatorname{reg} I$

  Serre $\Longrightarrow$ $\operatorname{Tor}^P(I, \Bbbk)$ verschwindet jenseits von Grad $\operatorname{reg} I$

Auflösbare Polynomalgebren

Definition: $(P = R[x_1, \dots, x_n], \star, \prec)$ *auflösbare Polynomalgebra* über Koeffizientenring R, wenn:

(a) $(P, \star)$ Ring mit Einheit 1

(b) $r \star f = rf$

(c) $\mathrm{lt}_\prec(x^\mu \star x^\nu) = x^{\mu+\nu} \quad \wedge \quad \mathrm{lt}_\prec(x^\mu \star r) = x^\mu$

R nullteilerfrei $\quad \Longrightarrow \quad \mathrm{lt}_\prec(f \star g) = \mathrm{lt}_\prec(f \cdot g)$

Beispiele: Polynome, lineare Differential- oder Differenzenoperatoren, Weyl-Algebra, Ore-Algebren, universelle Einhüllende von Lie-Algebren (nur Totalgradordnungen), q-Algebren, ...

Auflösbare Polynomalgebren

- R Noethersch $\Longrightarrow$ P Noethersch
- R nullteilerfrei $\Longrightarrow$ P nullteilerfrei
- P Ore-Bereich (links und rechts), d.h. Quotientenschiefkörper existieren
- Normalformberechnung wie kommutativ
- Gröbner- und involutive Basen existieren und können mit bekannten Algorithmen berechnet werden
- δ-Regularität größeres Problem
- Syzygientheorie nicht mehr unbedingt gültig

Sonstige Verallgemeinerungen

- Zwei Erweiterungen besonders interessant:
  - *Halbgruppenordnungen* (lokale Ordnungen)
  - Involutive Basen über *Koeffizientenringen*
- Benötigen Abschwächung des Begriffs einer involutiven Basis: *schwache involutive Basen*
- Liefern keine Stanley-Zerlegung mehr
- Involutiven Standarddarstellung nicht mehr eindeutig
- Involutiver Vervollständigungsalgorithmus weiterhin anwendbar