Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Explizit lösbare Probleme
(a) Stelle für die Menge $M = \{ u \in C^1([0,\pi]) \mid u(0) = 0 \}$ und das Funktional $I : M \to \mathbb{R}$;

$$I(u) = \int_0^\pi [(u'(x))^2 + 2u(x)\cos(x) + x^{27}]\,\mathrm{d}x + 4u(\pi),$$

die Euler–Lagrange–Gleichung auf und bestimme die kritischen Punkte.

(b) Bestimme mittels der klassischen Methode der Variationsrechnung alle kritischen Punkte von $I(u) = \int_1^2 x^3(u'(x))^2\,\mathrm{d}x$ unter den Randbedingungen $u(1) = 0, u(2) = 3$.

Aufgabe 2: Euler-Lagrange-**Gleichung:** Seien das Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$ und die Menge $M = \{ u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \mid u|_{\partial\Omega} \equiv 0 \}$ und das Funktional $I(u) : M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$I(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\nabla u(x) \cdot \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \nabla u(x) + \lambda u^2 \right) - \frac{1}{3} u^3 \right] \mathrm{d}x$$

gegeben. Stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf.

Aufgabe 3: Schwache und strake Minimierer, Beispiel von Scheeffer
(a) Stelle für die Menge $M = \{ u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = 0,\ u(1) = 0 \}$ und das Funktional $I : M \to \mathbb{R}$;

$$I(u) = \int_0^1 (u'(x))^2 + (u'(x))^3\,\mathrm{d}x,$$

die Euler–Lagrange–Gleichung auf und bestimme die kritischen Punkte.

(b) Zeige

- Jeder kritische Punkt ist ein schwacher lokaler Minimierer, jedoch kein starker.
- $\inf\{ I(v) \mid v \in M \} = -\infty$.