Übungsblatt 2

Aufgabe 5:

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen und diskutieren Sie das Verhalten der Lösungen. Dazu gehört die Frage, für welche $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung existiert, und das Verhalten der Lösung für $t \to t_-, t_+$, wobei (t_-, t_+) das (größte) Intervall bezeichnet, auf dem die Lösung existiert.

(a) $u'(t) = e^{u(t)} \sin(t), \quad u(t_0) = u_0.$

(b) $u'(t) = \frac{3u(t)-2t}{t}, \quad u(t_0) = u_0.$

(c) $\dot{x}(t) = \frac{x(t)}{t} - \tan \frac{x(t)}{t}, \quad x(t_0) = x_0.$
Hinweis: Setzen Sie $y(t) := x(t)/t$. Welche DGL erfüllt y?

Aufgabe 6: (Karpfenteich)

Eine Karpfenpopulation vermehre sich mit einer Wachstumsrate $\kappa > 0$ gemäß folgendem Gesetz

$$\dot{N}(t) = \kappa\Big(1 - \frac{N(t)}{N_{\max}}\Big)N(t), \quad N(0) = N_0 > 0, \tag{1}$$

wobei $N(t)$ die Anzahl der Karpfen zum Zeitpunkt t angibt und N_0 der Anfangsbestand ist.

(a) Lösen Sie (1) für $0 < N_0$ und diskutieren Sie das Ergebnis. Was passiert für $t \to \infty$?

(b) Nehmen Sie nun an, dass ein Fischreiher Karpfen mit einer konstanten Rate $H > 0$ aus dem Teich fischt, d.h. das Wachstumsgesetz modifiziert sich zu

$$\dot{N}(t) = \kappa\Big(1 - \frac{N(t)}{N_{\max}}\Big)N(t) - H, \quad N(0) = N_0. \tag{2}$$

Reskalieren Sie die Gleichung (2) via $\tau = \kappa t, \quad x(\tau) = \frac{N(\tau/\kappa)}{N_{\max}}$ und zeigen Sie, dass x die Gleichung

$$\dot{x}(\tau) = (1 - x(\tau))x(\tau) - h$$

löst, wobei $h = \frac{H}{\kappa N_{\max}}$. Sei $U = (0,1) \times (0,\infty)$. Visualisieren Sie Bereiche in U, in denen die Funktion $f : U \to \mathbb{R},\ (x,h) \mapsto (1-x)x - h$ positiv bzw. negativ ist.

Was ist das Langzeitverhalten von x für gegebene Anfangswerte $(x_0, h) \in U$?

Wie hilft die angefertigte Skizze weiter?

Welche optimale Fangquote sollte dem Reiher empfohlen werden?

(bitte wenden)

Aufgabe 7:

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\vec{u}(t) \in \mathbb{R}^3$ die Position eines Massenpunktes mit Masse m, welcher sich gemäß der Newtonschen Bewegungsgleichung durch ein Kraftfeld bewegt:

$$m\ddot{\vec{u}}(t) = \vec{F}(\vec{u}(t)), \quad \text{mit } \vec{F}(\vec{u}) = -\frac{mMG}{|\vec{u}|^2}\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}.$$

Wir nehmen an, der Massepunkt bewege sich nur in radialer Richtung, d.h. OBdA ist $\vec{u}(t) = r(t)\vec{e}_1$ mit $\vec{e}_1 = (1,0,0)^T$ und $r(t) \geq 0$.

(a) Schreiben Sie die DGL zur Bestimmung der Funktion $t \mapsto r(t)$ auf.

(b) Sei $v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$ die Geschwindigkeit des Massepunktes in Abhängigkeit der Zeit und $V(r)$ die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Position r, d.h. es besteht der Zusammenhang $V(r(t)) = v(t)$. Leiten Sie aus der Gleichung in (a) eine neue DGL zur Bestimmung der Funktion $r \mapsto V(r)$ her (Hinweis: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$).

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$V'(r) = -\frac{MG}{r^2V(r)}, \quad V(r_0) = V_0$$

mit $V_0, r_0 > 0$. Wie muss V_0 gewählt werden, damit $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$ ist? Was bedeutet das physikalisch?

Aufgabe 8:

Sei $U \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $g : U \to \mathbb{R}$ stetig und strikt monoton. Zeigen Sie: $g(U)$ ist ebenfalls ein offenes Intervall.

Bleibt die Aussage richtig, wenn g nur stetig und monoton ist?

Aufgabe 9: Riccatische DGL (schriftlich)

(a) Seien $a, g, h \in C(\mathbb{R})$ und seien u, u_p Lösungen der Riccati Differentialgleichung

$$u'(t) = a(t)u(t) + g(t)(u(t))^2 + h(t).$$

Zeigen Sie: Die Funktion, die durch $y(t) = \frac{1}{u(t)-u_p(t)}$ definiert ist, löst die lineare DGL

$$y'(t) = -\big(a(t) + 2g(t)u_p(t))y(t)\big) - g(t).$$

(b) Welchen Gleichungstyp erhält man mit der Transformation $y := u - u_p$?

(c) Finden Sie eine spezielle Lösung u_p der folgenden DGL

$$u'(t) = (u(t))^2 - \frac{u(t)}{t} - \frac{1}{t^2}$$

und lösen Sie sie mittels der Transformation aus Teil (a) für den speziellen Anfangswert $u(1) = 2$.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe bis Montag, 29.10., 16 Uhr.
Die übrigen Aufgaben werden in den Übungen am Montag, 29.10 bzw. Mittwoch, 31.10.2012 besprochen.