Übungsblatt 3

Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = 4t^2(u(t))^2 + \frac{1}{t}u(t) - t^4, \quad u(1) = u_0.$$

Hinweis: es gibt eine Lösung der Form $u_p(t) = at^b$ für geeignete Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 11:

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein zusammenhängendes Gebiet und seien die Funktionen $g, h : D \to \mathbb{R}$, $(t, u) \mapsto g(t, u)$ bzw. $h(t, u)$ aus $C^1(D; \mathbb{R})$.

Zeigen Sie: Falls der Ausdruck

$$\frac{\partial_u h(t, u) - \partial_t g(t, u)}{g(t, u)}$$

nicht von t abhängt, so existiert ein Integrierender Faktor M der Form $M = M(t)$ auf D für die DGL $h(t, u(t)) + g(t, u(t))u'(t) = 0$. Geben Sie M explizit an.

(b) Lösen Sie die folgende DGL (eine Stammfunktion genügt):

$$(2t^2 + 2tu^2(t) + 1)u(t) + (3u^2(t) + t)u'(t) = 0.$$

Aufgabe 12:

Bestimmen Sie die Lösungen der DGL (eine Stammfunktion genügt):

$$(tu(t)^2 - u(t)^3) + (1 - tu(t)^2)u'(t) = 0$$

Hinweis: Es gibt einen integrierenden Faktor der Form $M = M(u)$.

Skizzieren Sie das Richtungsfeld und zeichnen Sie einige Lösungskurven. (z.B. mit Hilfe der Isoklinen für die Steigungen $0, 1, -1, \infty$). Gibt es eine Lösung durch den Nullpunkt und wie lautet sie gegebenenfalls?

(bitte wenden)

Aufgabe 13:

Lösen Sie die DGL

$$\sin x - x\cos x - 3x^2(u(x)-x)^2 + 3x^2(u(x)-x)^2 u'(x) = 0, \quad u(\pi) = \pi + 1.$$

Hinweis: vgl. Aufgabe 11.

Aufgabe 14: Potenzreihenansatz

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$u'(x) = u(x)^2 - x^2, \quad u(0) = 1 \tag{1}$$

durch einen Potenzreihenanstaz $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, indem Sie diesen Ansatz (formal) in (1) einsetzen und die Konstanten a_k durch einen Koeffizientenvergleich bestimmen. Zeigen Sie per Induktion, dass die Koeffizienten die Abschätzung $|a_k| \leq 1$ erfüllen. Schließen Sie daraus, dass die so gefundene formale Lösung im Intervall $(-1, 1)$ tatsächlich eine Lösung des AWP (1) ist.

Aufgabe 15:

Für $W(u) = (1-u)^2(1+u)^2$ betrachte man die Gradientenflussgleichung

$$\dot{u}(t) = -W'(u(t)).$$

Bestimmen Sie sämtliche konstante Lösungen der DGL.

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der DGL mit Hilfe von Isoklinen, und skizieren Sie Lösungskurvern durch die Punkte $(t_0, u_0) \in \{(0,2), (0,1/2), (0,-1/2), (0,-2)\}$ für $t \geq 0$.

Welche der konstanten Lösungen würden Sie (ohne nähere Definition) als stabil bezeichnen?

Aufgabe 16: Isoklinen und Richtungsfeld (schriftlich)

Skizzieren Sie für die skalare Differenzialgleichung

$$u'(t) = u(t) - \sin(t)$$

Isoklinen und Richtingsfeld, Bereiche von Wachsen und Fallen bzw. Konkavität und Konvexität von Lösungskurven und skizzieren Sie die Lösungskurven durch $(t_0, u_0) = (\pi/2, 1)$ bzw. $(\pi/2, -1)$.

Welche Aussagen bezüglich des qualitative Verhaltens (z.B. Beschräktheit) der beiden Lösungskurven lassen sich für $t < \pi/2$ bzw. $t > \pi/2$ treffen und sogar beweisen?

Abgabe der schriftlichen Aufgabe bis Mittwoch, 7.11., 16 Uhr.

Die Aufgaben 10–12 werden in den Übungen am Mittwoch, 7.11., die restlichen Aufgaben in der darauffolgenden Woche, am Montag, 12.11. bzw. Mittwoch, 14.11.2012 besprochen.