Übungsblatt 4

Aufgabe 17: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter reeller Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Umgekehrte Dreiecksungleichung: Für alle $u, v \in X$ ist $\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u - v\|$.

(b) Aus $u_n \to u$ in X, $v_n \to v$ in X und $\alpha_n \to \alpha$ in $\mathbb{R}$ folgt
   (i) $u_n + v_n \to u + v$ in X.
   (ii) $\alpha_n u_n \to \alpha u$ in X.
   (iii) $\|u_n\| \to \|u\|$.

Aufgabe 18: Auf $C^0([0,1], \mathbb{R})$ sei folgende Abbildung definiert:

$$N : C^0([0,1], \mathbb{R}) \to [0, \infty); \quad N(u) := \int_0^1 |u(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung N definiert eine Norm auf $C^0([0,1], \mathbb{R})$.

(b) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0([0,1], \mathbb{R})$, definiert durch

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

ist eine Cauchy-Folge bezüglich der Norm N. Ist $C^0([0,1], \mathbb{R})$ ein Banach-Raum bezüglich dieser Norm?

Aufgabe 19: (Fredholmsche Integralgleichung)
Sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren die Abbildung

$$T : C^0([0,1], \mathbb{R}) \to C^0([0,1], \mathbb{R}), \quad u \mapsto T(u)$$

durch

$$\forall x \in [0,1] : \quad T(u)(x) := \int_0^1 k(x,y) u(y) \, \mathrm{d}y.$$

Man zeige:

(a) Für alle $u \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ ist $T(u) \in C^0([0,1], \mathbb{R})$.

(b) Die Abbildung T ist Lipschitz-stetig bezüglich der Supremumsnorm mit einer Lipschitz-Konstanten $\leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,y)| \, \mathrm{d}y$.

(c) Ist $\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,y)| \, \mathrm{d}y < 1$, so hat die Gleichung $u - T(u) = g$ für jedes $g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ eine eindeutige Lösung.

Aufgabe 20: (schriftlich)

(a) Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$u'(t) = (t - u(t) + 3)^2$$

und skizziere mit Hilfe ausgewählter Isoklinen die Lösungsschar.
Hinweis: Zum Lösen der DGL benutze man die Transformation $w(t) := t - u(t) + 3$.

(b) Man bestimme die Lösungsschar der Differentialgleichung

$$(tu(t) + t^2 + t + 1) + (t + 1)u'(t) = 0.$$

Hinweise: Es gibt einen integrierenden Faktor der Form $M = M(t)$. Wie lautet die Ableitung der Funktion $w(t) = e^t/(1 + t)$?

Abgabe der schriftlichen Aufgabe bis Montag, 19.11., 16 Uhr.

Die Aufgaben werden in den Übungen am Montag, 19.11. bzw. Mittwoch, 21.11.2012 besprochen.