Gewöhnliche
Differentialgleichungen
Wintersemester 12/13
Dorothee Knees
19.11.2012

Übungsblatt 5

Aufgabe 21: (Lipschitz-Bedingung)

Bestimmen Sie Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, auf denen die folgenden Funktionen eine Lipschitzbedingung gemäß Definition 3.6 (d.h. Lipschitz-stetig im zweiten Argument, mit gleichmäßiger Lipschitz-Konstanten bezüglich des ersten Arguments) erfüllt.

(a) $f(t,u) = t + u^2$,
(b) $f(t,u) = \arctan(t)(1+u)$
(c) $f(t,u) = (1+t^2+u^2)^{-1}$
(d) $f(t,u) = \sin(\sqrt{|u|})$

Aufgabe 22: (Picard-Lindelöf)

Diskutieren Sie die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der DGL

$$u'(t) = au(t), \quad u(0) = u_0$$

für $a \in \mathbb{R}$ mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf und berechnen Sie die ersten vier Iterierten der Picard-Iteration zur Startfunktion $u_1(t) = u_0$. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der expliziten Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 23:

Diskutieren Sie die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} u'(t) &= t^2 + \sin\big(u(t)+v(t)\big), \\ v'(t) &= u(t) + v(t), \\ u(0) &= 0,\ v(0) = 0. \end{aligned}$$

HINWEIS: es ist nicht verlangt, dass Sie eine explizite Lösung angeben!

Aufgabe 24:

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$u'(t) = (u(t))^4 + 3e^{-t^2}, \quad u(0) = 0$$

eine eindeutige Lösung auf $I = [-\frac{2}{19}, \frac{2}{19}]$ besitzt und dass $0 \le u(t) \le 2$ für alle $0 \le t \le \frac{2}{19}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 25: (schriftlich)

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $g \in C^0(U, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(i) Sei u eine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(t) = g(u(t), u'(t)) \tag{1}$$

mit $u'(t) \neq 0$ auf dem Definitionsbereich von u. Sei u^{-1} die Umkehrfunktion von u und setze

$$z(s) := u'(u^{-1}(s)).$$

Dann löst z die folgende Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{g(s, z(s))}{z(s)}.$$

(ii) Sei z eine Lösung von $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{g(s,z(s))}{z(s)}$ und u eine Lösung der Differentialgleichung $u'(t) = z(u(t))$. Dann ist u eine Lösung von (1).

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$u''(t) = \frac{u'(t)^3 - 1}{3u(t)u'(t)}, \quad u(0) = 1, u'(0) = 2.$$

Abgabe der schriftlichen Aufgabe bis Montag, 26.11., 16 Uhr.

Die Aufgaben werden in den Übungen am Montag, 26.11. bzw. Mittwoch, 28.11.2012 besprochen.