Übungsblatt 6

Aufgabe 26:

Zeigen Sie, dass das folgende Anfangswertproblem genau eine Lösung besitzt und geben Sie einen möglichst großen Existenzbereich an:

$$u'(t) = u(t)\sin(\sqrt{3t - t^2 - 2}), \quad u(\tfrac{3}{2}) = 1\,.$$

Aufgabe 27:

(a) Bestimmen Sie ein möglichst großes $a > 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= t + (v(t))^2, \\ v'(t) &= -t + (u(t))^2 \end{aligned}$$

mit $u(0) = 0$, $v(0) = 0$ genau eine Lösung auf dem Intervall $[-a, a]$ hat.

(b) Berechnen Sie, ausgehend von $u_1(t) := 0$, $v_1(t) := 0$ zwei Picard-Iterierte.

Hinweis: Benutzen Sie die Maximumsnorm in $\mathbb{R}^2$, d.h. $\|(x, y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 28:

Die Funktion $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ sei im zweiten Argument Lipschitz-stetig (vgl. Def. 3.6).

(a) Gibt es durch jeden beliebigen Punkt $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ immer eine Lösung der DGL $u'(t) = f(t, u(t))$?

(b) Es gelte nun zusätzlich $f(-t, u) = -f(t, u)$ für alle $(t, u) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass dann jede Lösung der DGL $u'(t) = f(t, u(t))$ eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 29: Norm auf den stetigen Funktionen

Für $L > 0$ und $u \in C^0([0, T]; \mathbb{R})$ $(0 < T < \infty)$ sei

$$\|u\|_L := \sup_{t \in [0,T]} e^{-Lt} |u(t)|\,.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_L$ eine Norm auf $C^0([0, T]; \mathbb{R})$ definiert.
Zeigen Sie ferner, dass $\|\cdot\|_L$ und die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ äquivalente Normen auf $C^0([0, T]; \mathbb{R})$ sind. Das heißt, dass Konstanten $c, C > 0$ existieren, so dass für alle $u \in C^0([0, T]; \mathbb{R})$ gilt:

$$c\,\|u\|_L \le \|u\|_\infty \le C\,\|u\|_L\,.$$

Ist $C^0([0, T]; \mathbb{R})$ bezüglich der $\|\cdot\|_L$-Norm ein Banach-Raum?

(bitte wenden)

Aufgabe 30: (schriftlich)

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$u'(t) = \cos\Big(t^2(u(t))^2\Big), \quad u(0) = 1$$

im Rechteck $\{\, (t,u) \in \mathbb{R}^2 \,;\, |t| \leq 1, |, |u-1| \leq 1 \,\}$ genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1,1]$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$u''(t) = t(1 - u(t) - u'(t)), \quad u(0) = 0,\ u'(0) = 0$$

genau eine Lösung besitzt und geben Sie eine Abschätzung für das Existenzintervall an. Berechnen Sie ferner zwei Picard-Iterierte ausgehend von konstanten Funktionen mit Werten gleich den Anfangswerten.
(Erinnerung: Aufgabe 1 auf Blatt 1)

Aufgabe 31: Spieleabend der Fachschaft Mathematik

Der Fachschaftsrat lädt ein zum

SPIELEABEND

Am **29.11.2012 ab 18:03Uhr** im neuen Ludi und der Fachschaft.

Für Knabbereien und eine kleine Sammlung an Spielen ist gesorgt. Getränke sowie eigene Spiele könnt ihr gerne selbst mitbringen. Außerdem planen einige Studenten an diesem Abend zu pokern. Falls ihr dazu ebenfalls Lust habt, schreibt uns eine Email an

fsr-mathe@lists.uni-due.de

sodass wir weitergeben können wie viele Pokerkoffer ungefähr benötigt werden. Sofern ihr selber einen Pokerkoffer habt und diesen mitbringen könnt, schreibt das auch in die Email!

Euer Fachschaftsrat Mathematik

Abgabe der schriftlichen Aufgabe bis Montag, 03.12., 16 Uhr.
Die Aufgaben werden in den Übungen am Montag, 03.12. bzw. Mittwoch, 05.12.2012 besprochen.

KLAUSUR: am Donnerstag, 14. Februar 2013, 14–16 Uhr