Gewöhnliche
Differentialgleichungen
Wintersemester 12/13
Dorothee Knees
03.12.2012

# Übungsblatt 7

**Aufgabe 32:**

Beweisen Sie, dass für jedes Anfangspaar $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ das Anfangswertproblem

$$u'(t) = \frac{t^3 u(t)^3}{1 + u(t)^2} + e^t \cos u(t), \quad u(t_0) = u_0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt.

**Aufgabe 33:** Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$u'(t) = \sin(t^2 (u(t))^2), \quad u(0) = u_0$$

eine eindeutige globale Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ besitzt und dass diese Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ die folgende Abschätzung $\quad |u(t) - u_0| \leq |t| \quad$ erfüllt.

**Aufgabe 34:**

$f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich der zweiten Variablen (vgl. Definition 3.10 der Vorlesung).

Zeigen Sie, zum Beispiel mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises, dass das maximale Existenzintervall des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(t, u(t)), \;\; u(t_0) = u_0$$

für jeden Anfangswert $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen ist.

(bitte wenden)

**Aufgabe 35: Variante des Satzes von Picard-Lindelöf**

Sei $T > 0$ und $f \in C^0([0,T];\mathbb{R})$. Weiter erfülle $f$ eine globale Lipschitz-Bedinung bezüglich der zweiten Variablen, d.h. es existiere eine Konstante $L \geq 0$, so dass für alle $t \in [0,T]$ und alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq L\,|u - v|\,.$$

(a) Die Abbildung $T : C^0([0,T];\mathbb{R}) \to C^0([0,T];\mathbb{R})$ sei definiert durch

$$T(v)(t) := u_0 + \int_0^t f(\tau, v(\tau))\mathrm{d}\tau$$

für $v \in C^0([0,T];\mathbb{R})$, $t \in [0,T]$ und $u_0 \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass $T : C^0([0,T];\mathbb{R}) \to C^0([0,T];\mathbb{R})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_L$ aus Aufgabe 29 eine starke Kontraktion ist, wobei $L$ die Lipschitz-Konstante von $f$ ist.

(Zur Erinnerung: $\|v\|_L = \sup_{0\leq t\leq T} e^{-Lt}\,|v(t)|$)

(b) Formulieren und beweisen Sie einen Existenzsatz für das Anfangswertproblem $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = u_0$.

**Aufgabe 36: (schriftlich)**

Weisen Sie nach, dass das Anfangswertproblem

$$u_1'(t) = t^2 + \sin(u_1(t) + u_2(t)) \tag{1}$$

$$u_2'(t) = u_1(t) - u_2(t) \tag{2}$$

mit $u_1(t_0) = u_{0,1}$ und $u_2(t_0) = u_{0,2}$ für alle Anfangspaare $(t_0, \left(\begin{smallmatrix} u_{0,1} \\ u_{0,2} \end{smallmatrix}\right))$ genau eine globale Lösung besitzt.

Seien nun $u$ bzw. $v \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ Lösungen von (1)–(2) zu den Anfangswerten $u_0$ bzw. $v_0 \in \mathbb{R}^2$ und Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$. Leiten Sie eine Abschätzung für $|u(t) - v(t)|_\infty$ her, wobei $|\cdot|_\infty$ die Maximumnorm in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

**Abgabe der schriftlichen Aufgabe bis Montag, 10.12., 16 Uhr.**
**Die Aufgaben werden in den Übungen am Montag, 10.12. bzw. Mittwoch, 12.12.2012 besprochen.**

**KLAUSUR: am Donnerstag, 14. Februar 2013, 14–16 Uhr**