Übungsblatt 8

Aufgabe 36:

Zeigen Sie, dass die Frobeniusnorm in folgendem Sinne submultiplikativ ist:

$$\forall\, A \in \mathbb{R}^{n,m},\ \forall u \in \mathbb{R}^m : \quad |Au|_2 \leq \|A\|_F\, |u|_2\,.$$

($\|\cdot\|_F$ Frobenius-Norm, $|\cdot|_2$ Euklidische Norm)

Aufgabe 37:

Sei $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (global) Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die autonome DGL

$$u'(t) = f(u(t)), \quad u(t_0) = u_0$$

für jedes Paar $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine globale Lösung besitzt.

(b) Sei zusätzlich $f(0) = f(1) = 0$. Können Lösungen mit Anfangswert $u_0 \in [0, 1]$ jemals das Intervall $[0, 1]$ verlassen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 38:

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachte die skalaren Differentialgleichungen

$$u'(t) = au(t), \quad u(0) = u_0, \tag{1}$$

$$v_n'(t) = av_n(t) + \frac{1}{n}\cos(t(v_n(t))^2), \quad v_n(0) = v_n^0. \tag{2n}$$

(a) Zeigen Sie: (1) bzw. (2n) besitzen für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils eine eindeutige globale Lösung.

(b) Es gelte $\lim_{n\to\infty} v_n^0 = u_0$. Sei $T > 0$ beliebig. Zeigen Sie: für $n \to \infty$ konvergiert die Lösungsfolge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von (2n) gleichmäßig auf $[0, T]$ gegen die Lösung u von (1). Geben Sie eine Abschätzung für $\|u - v_n\|_{C^0([0,T],\mathbb{R})}$ an.

(Hinweis: z.B. Gronwall-Lemma. Es ist nicht verlangt, dass Sie (2n) explizit lösen!)

(bitte wenden)

Aufgabe 39: (schriftlich)

(a) Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $b \in C^0(I;\mathbb{R}^n)$, $A \in C^0(I;\mathbb{R}^{n\times n})$ und $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Ferner existiere eine Konstante $c > 0$, so dass gilt:

$$\forall u \in \mathbb{R}^n : \qquad |\varphi(u)| \leq c \quad \text{und} \quad |\mathrm{D}_u\varphi(u)| \leq c.$$

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$u'(t) = A(t)\varphi(u(t)) + b(t),\ u(t_0) = u_0$$

für jeden Anfangswert $(t_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $u \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ besitzt.

(Falls Ihnen $n > 1$ zu aufwendig erscheint, machen Sie sich den Sachverhalt zunächst für $n = 1$ klar.
Ferner: $\mathrm{D}_u\varphi(u) = (\partial_{u_j}\varphi_i(u))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ für $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n)$)

(b) Diskutieren Sie die Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems

$$u'(t) = \frac{e^t(u(t))^2}{1 + (u(t))^2} + \ln(1 + t^2), \quad u(t_0) = u_0.$$

Abgabe der schriftlichen Aufgabe bis Montag, 17.12., 16 Uhr.
Die Aufgaben werden in den Übungen am Montag, 17.12. bzw. Mittwoch, 19.12 besprochen.

KLAUSUR: am Donnerstag, 14. Februar 2013, 14–16 Uhr