Übungsblatt 9

Aufgabe 40:

Für $T > 0$ und $a, b, c, d \in C^0([-T, T]; \mathbb{R})$ betrachte die folgende skalare DGL. zweiter Ordnung:

$$a(t)u''(t) + b(t)u'(t) + c(t)u(t) + d(t) = 0, \quad u(0) = u_0,\; u'(0) = u_1.$$

Sei $a(t) \neq 0$ für alle $t \in (-T, T)$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf $(-T, T)$ besitzt.

Sei zusätzlich $a(\pm T) \neq 0$. Was folgt nun für die Exsitenz von Lösungen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 41:

Sei $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und es existiere $\sigma > 0$ mit $|f(t, u)| \leq \sigma\,|t|$ für alle $t, u \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie (z.B. mit Hilfe des Satzes von Peano), dass das AWP

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0$$

für jedes $a > 0$ wenigstens eine Lösung $u_a \in C^1([-a, a]; \mathbb{R})$ besitzt. Existiert auch eine globale Lösung?

Aufgabe 42:

Für $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f(t,u) = \begin{cases} 2t & \text{für } u \leq 0 \\ 2t - 4\frac{u}{t} & \text{für } 0 < u < t^2 \\ -2t & \text{für } t^2 \leq u \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie (z.B. Satz von Peano oder vorige Aufgabe), dass das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = 0 \tag{1}$$

wenigstens eine globale Lösung $u \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ besitzt.

(b) Berechnen Sie, ausgehend von $u_1(t) = 0$, sämtliche Picard-Iterierten für das AWP (1). Zeigen Sie, dass die so konstruierte Funktionenfolge keine Teilfolge enthält, die auf irgendeinem Intervall der Form $[-a, a]$, $a > 0$, gegen eine Lösung des Anfangswertproblems (1) konvergiert. Woran könnte das liegen?

(bitte wenden)

Aufgabe 43: (schriftlich)

(a) Bestimmen Sie die maximale Lösung (d.h. das max. Existenzintervall + Lösungsfunktion) des AWPs

$$u'(t) = -\frac{t}{u(t)^2}, \quad u(0) = 1.$$

(b) Für welche Anfangsdaten $u_0 \in \mathbb{R}$ existiert die maximale Lösung des AWPs

$$u'(t) = -\frac{t}{u(t)^2}, \quad u(0) = u_0.$$

auf ganz $\mathbb{R}$?

(c) Sind die Lösungen aus (a) bzw. (b) eindeutig? Begründung!

Abgabe der schriftlichen Aufgabe bis Montag, 07.01.2013, 16 Uhr.
Die Aufgaben werden in den Übungen am Montag, 07.01. bzw. Mittwoch, 09.01. besprochen.

KLAUSUR: am Donnerstag, 14. Februar 2013, 14–16 Uhr