Übungsblatt 10

Aufgabe 44:

Ist

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

Fundamentalmatrix einer Differentialgleichung der Form $u'(t) = A(t)u(t)$? Geben Sie gegebenenfalls A an.

Aufgabe 45:

Bestimmen Sie für die eindimensionale Differentialgleichung

$$u'(t) = \alpha u(t) \quad \text{für } \alpha \neq 0$$

ein Fundamentalsystem und die Übergangsmatrix $\Pi(t, t_0)$ für beliebige $t, t_0 \in \mathbb{R}$.

Geben Sie eine Lösung für das Anfangswertproblem $u'(t) = \alpha u(t) + b(t)$, $u(t_0) = u_0$, gemäß Satz 4.9 an ($b \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Vergleich mit Proposition 2.2?

Aufgabe 46:

Sei $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix des n-dimensionalen linearen Systems

$$u'(t) = A(t)u(t)$$

mit $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n\times n})$. Sei ferner $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre konstante Matrix.

Zeigen Sie, dass $B\Gamma(\cdot)$ genau dann eine Fundamentalmatrix dieser Differentialgleichung ist, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad BA(t) = A(t)B.$$

Aufgabe 47:

Gegeben sei das zweidimensionale System für $t \in I = (e^{-1}, \infty)$:

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t(1 + \ln t) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie a_1, a_2 so, dass die Funktionen $u_I(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$ und $u_{II}(t) := \begin{pmatrix} \ln t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem für (1) bilden.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Systems (1) zum Anfangswert $u(1) = (0, 0)^T$.

(bitte wenden)

Aufgabe 48: (schriftlich)

Für $t \in (1, \infty)$ seien

$$A(t) = \begin{pmatrix} -t^2 & 1 \\ 2t - t^4 - \frac{t}{\ln t} & t^2 + \frac{1}{t \ln t} \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} \frac{\ln t}{t} \\ t \ln t + \frac{\ln t}{t^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $u'(t) = A(t)u(t)$ eine Lösung der Form $u_1(t) = \begin{pmatrix} t^\alpha \\ t^\beta \end{pmatrix}$ mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hat.

(b) Ermitteln Sie eine Fundamentallösung zu $u' = A(t)u$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $u'(t) = A(t)u(t) + b(t)$ mit $u(e) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe bis Montag, 14.01.2013, 16 Uhr.
Die Aufgaben werden in den Übungen am Montag, 14.01. bzw. Mittwoch, 16.01. besprochen.

KLAUSUR: am Donnerstag, 14. Februar 2013, 14–16 Uhr