Übungsblatt 11

Aufgabe 49:

Sei $\Pi(t, t_0)$ eine Übergangsmatrix eines auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierten linearen Systems

$$u'(t) = A(t)u(t)$$

mit $A \in C(I; \mathbb{R}^{n\times n})$. Bestimmen Sie ein lineares System, für das die Matrix $\Psi(t, t_0) := \Pi(-t, -t_0)$ eine Übergansmatrix ist. Ist dieses System eindeutig bestimmt?

Aufgabe 50:

Für $t \in I = (0, \infty)$ seien

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösung der DGL $u'(t) = A(t)u(t)+b(t)$ mit Anfangswert $u(2) = (1, 4)^T$.
Hinweis: Das homogene System besitzt eine Lösung der Form $u_I(t) = (t^\alpha, t^\beta)^T$ mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 51:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein intervall und $A \in C(I; \mathbb{R}^{n\times n})$.

(a) Zeigen Sie: Eine matrixwertige Funktion $\Psi \in C^1(I; \mathbb{R}^{n\times n})$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix des Systems

$$u'(t) = -A(t)^T u(t),$$

wenn für jede Fundamentalmatrix Γ des Systems $u'(t) = A(t)u(t)$ eine konstante, reguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, so dass für alle $t \in I$ gilt: $\Psi(t)^T\Gamma(t) = B$.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Übergangsmatrizen dieser beiden Systeme?

(b) Seien $u, v \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ Funktionen mit $u'(t) = A(t)u(t)$ bzw. $v'(t) = -A(t)^T v(t)$. Zeigen Sie, dass dann $t \mapsto u(t) \cdot v(t)$ (Skalarprodukt) konstant ist.

(c) Es gelte zusätzlich, dass $A(t) = -A(t)^T$ für alle t. Zeigen Sie, dass für alle Lösungen von $u'(t) = A(t)u(t)$ gilt: Die Abbildung $t \mapsto \|u(t)\|_2^2$ (Euklidische Norm) ist konstant. Was bedeutet das anschaulich?

Aufgabe 52:

Berechnen Sie $\exp(tA)$ für die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 53:

Es sei $A \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n\times n})$. Zeigen Sie: Falls $A(t)$ und $\int_0^t A(\tau)\mathrm{d}\tau$ für alle $t \in \mathbb{R}$ kommutieren, so ist $\Gamma(t) := \exp(\int_0^t A(\tau)\mathrm{d}\tau)$ eine Fundamentalmatrix für das System $u'(t) = A(t)u(t)$.

Aufgabe 54:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\exp(A)$.

Aufgabe 55: (schriftlich, Abgabe am Montag 28.01.)

Es seien für $t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(i) Berechnen Sie die globale Lösung des Anfangswertproblems $u'(t) = Au(t) + b(t)$, $u(0) = (0, 4)^T$.

(ii) Für welche Anfangsdaten $u_0 \in \mathbb{R}^2$ für das homogene AWP

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = u_0,$$

mit A aus (1) erfüllt die globale Lösung folgendes: $\lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0$?

Abgabe der schriftlichen Aufgabe bis Montag, 28.01.2013, 16 Uhr.
Die Aufgaben 49–51 werden in den Übungen am Mittwoch, 23.01., die restlichen Aufgaben werden in den Übungen am Montag, 28.01., bzw. Mittwoch, 31.01. besprochen.

KLAUSUR: am Donnerstag, 14. Februar 2013, 14–16 Uhr