

Übungsblatt 12

Aufgabe 56: Gedämpfte Schwingung

Die Bewegungsgleichung des skizzierten Masse-Feder-Dämpfer-Systems lautet

$$m \ddot{x}(t) + d \dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (1)$$

$$x(0) = u_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (2)$$

Hierbei ist x die Auslenkung des Massepunkts aus der Ruhelage, $m > 0$ die Masse, $d \geq 0$ die Dämpfungskonstante und $k > 0$ die Federkonstante.

Im Folgenden seien $m = 1$ und $k = 1$.

- (a) Schreiben Sie (1)–(2) in ein System erster Ordnung für $u(t) := x(t)$ und $v(t) := \dot{x}(t)$ um (inklusive Anfangsdaten).

Klassifizieren Sie das System ((nicht-)linear, (in-)homogen, (nicht-) autonom?).

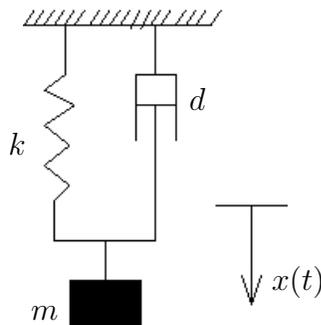
- (b) Bestimmen Sie sämtliche Ruhepunkte des Systems aus (a).

- (c) Untersuchen Sie die Stabilität des Ruhepunktes $(u_*, v_*)^T = (0, 0)^T$ des Systems aus (a) in Abhängigkeit des Parameters $d \geq 0$.

Für welche $d \geq 0$ enthält das zugehörige Fundamentalsystem keine Terme der Form $\cos \omega t$ oder $\sin \omega t$ ($\omega \neq 0$)?

- (d) Seien $u_0 = 1$ und $v_0 = 0$. Lösen Sie das System aus Teil (a) mit diesen Anfangswerten für $d = 1$ und für $d = 2\sqrt{2}$.

Skizzieren Sie jeweils die Lösungskurve für u und die zugehörigen Trajektorien/Bahnkurven $t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.



(bitte wenden)

Aufgabe 57:

Man zeige oder finde ein Gegenbeispiel: Wenn eine Lösung des Problems

$$u'(t) = Au(t), \quad (A \in \mathbb{R}^{2 \times 2})$$

existiert, die auf $(0, \infty)$ unbeschränkt ist, dann gibt es eine von Null verschiedene Lösung \tilde{u} , für die $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\tilde{u}(t)| = 0$ gilt.

Aufgabe 58:

Für das System

$$\begin{aligned} \frac{u'(t)}{w(t)} &= 2u(t)v(t) \\ v'(t) &= -u(t) - 2w(t)^2 + 8 \\ w'(t) &= w(t)^2 - v(t)^2 \end{aligned}$$

berechne man sämtliche Ruhepunkte und untersuche deren Stabilität.

Die Aufgaben werden in den Übungen am Montag, 04.02., bzw. Mittwoch, 06.02. besprochen.

KLAUSUR: am Donnerstag, 14. Februar 2013, 14–16 Uhr,
Raum S05 T00 B08

NACHKLAUSUR: am Donnerstag, 14. März 2013, 10–12 Uhr,
der Raum wird noch bekanntgegeben.