Sammlung interessanter Aufgaben

Aufgabe 1:

(a) Bestimmen Sie die maximale Lösung (d.h. maximales Existenzintervall + Lösungsfunktion) des Anfangswertproblems

$$u'(t) = -tu(t)^2, \quad u(2) = 1$$

(b) Für welche Anfangsdaten $t_0, u_0 \in \mathbb{R}$ existiert die maximale Lösung des AWPS

$$u'(t) = -tu(t)^2, \quad u(t_0) = u_0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 2: Bestimmen Sie den Typ der folgenden DGL und lösen Sie das Anfangswertproblem

$$u'(t) = e^{-t}u(t)^2 + u(t) - e^t, \quad u(0) = 5.$$

Hinweis: Die DGL besitzt eine partikuläre Lösung der Form $u(t) = e^{\alpha t}$ mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und einfach zusammenhängend und seien $g, h \in C^1(D, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie: hängt

$$\widetilde{a}(t,u) := \frac{\partial_u h(t,u) - \partial_t g(t,u)}{th(t,u) - ug(t,u)}$$

nur von tu ab, d.h. $\widetilde{a}(t,u) = a(tu)$, so ist (mit irgendeinem $\alpha \in \mathbb{R}$) die Funktion $M(t,u) := \exp(\int_\alpha^{tu} -a(\sigma)\mathrm{d}\sigma)$ ein integrierender Faktor für die DGL

$$g(t,u(t))u'(t) + h(t,u(t)) = 0.$$

(b) Lösen Sie die folgende DGL (eine Stammfunktion genügt):

$$3tu(t) + 4t^2u(t)^2 + \big(2t^2 + 3t^3u(t)\big)u'(t) = 0.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4: Sei $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ linear beschränkt und lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Variablen. Ferner existiere $R > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t, R) < 0 \quad \text{und} \quad f(t, -R) > 0.$$

Sei $u_0 \in \mathbb{R}$ mit $|u_0| < R$ und $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sei die Lösung des AWPs

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0.$$

Zeigen Sie

(a) Für alle $t > 0$ ist $|u(t)| \leq R$.

(b) Ist $|u(t_*)| = R$ für wenigstens ein $t_* > 0$ möglich? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: eventuell hilft eine Skizze des Richtungsfeldes längs der beiden Geraden $\binom{t}{\pm R}$, $t \in \mathbb{R}$, weiter.

Aufgabe 5:

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die skalaren Differentialgleichungen

$$u'(t) = \frac{1 + u(t)}{1 + u(t)^2}, \quad u(0) = u_0, \tag{1}$$

$$v_n'(t) = \frac{1 + v_n(t)}{1 + v_n(t)^2} + \frac{1}{n} \sin(t v_n(t)), \quad v_n(0) = v_n^0. \tag{2n}$$

(a) Zeigen Sie: (1) bzw. (2n) besitzen für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils eine eindeutige globale Lösung.

(b) Es gelte $\lim_{n\to\infty} v_n^0 = u_0$. Sei $T > 0$ beliebig. Zeigen Sie: für $n \to \infty$ konvergiert die Lösungsfolge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von (2n) gleichmäßig auf $[0, T]$ gegen die Lösung u von (1). Geben Sie dazu eine Abschätzung für $\|u - v_n\|_{C^0([0,T],\mathbb{R})}$ an.

(Hinweis: Es ist nicht verlangt, dass Sie (2n) explizit lösen!)

(bitte wenden)

Aufgabe 6:
Für $t > 0$ seien
$$A(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & -1 \\ t^{-2} & -2t^{-1} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 3t \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das homogene System $u'(t) = A(t)u(t)$ eine Lösung der Form
$$u_I(t) = \begin{pmatrix} t^\alpha \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$
besitzt mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$ und einer Funktion $\varphi \in C^1((0,\infty);\mathbb{R})$.

(b) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix des Systems $u'(t) = A(t)u(t)$.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $u'(t) = Au(t) + b(t)$, $u(1) = (0,1)^T$.

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von reellen Lösungen des Systems
$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ 2u_2(t) - 3u_3(t) \\ u_1(t) + 3u_2(t) + 2u_3(t) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: Es seien für $t \in \mathbb{R}$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die globale Lösung des Anfangswertproblems $u'(t) = Au(t) + b(t)$, $u(0) = (0,4)^T$.

(b) Für welche Anfangsdaten $u_0 \in \mathbb{R}^2$ für das homogene AWP $u'(t) = Au(t)$, $u(0) = u_0$ erfüllt die globale Lösung folgendes: $\lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0$?

Aufgabe 9:
Es seien $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und für alle $t \in \mathbb{R}$ gelte:
$$a(-t) = a(t), \quad b(-t) = -b(t).$$
Zeigen Sie, dass für jede Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der DGL
$$u''(t) + b(t)u'(t) + a(t)u(t) = 0$$
gilt:
$$u(-t) = u(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad u'(0) = 0.$$

KLAUSUR: am Donnerstag, 14. Februar 2013, 14–16 Uhr, Raum S05 T00 B08