Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1: Man bestimme allgemeine Lösungen $u = u(x, y)$ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

$$\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \qquad \text{b)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1, \qquad \text{c)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1, \qquad \text{d)}\ 3\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0\,.$$

Aufgabe 1.2: Man untersuche, ob folgende partielle Differentialgleichungen semilinear, quasilinear oder voll nichtlinear sind und bestimme ihre Ordnung:

a) Nichtlineare Poissongleichung: $-\Delta u = f(u)$,
b) p-Laplace-Gleichung: $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$ für $p \in (1, \infty)$,
c) Navier-Stokes System:

$$u_t + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = -\nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0\,,$$

wobei $u = (u_1, u_2, u_3)$ ein Geschwindigkeitsfeld und p ein skalares Druckfeld bezeichnet, ν ist eine Materialkonstante.

Aufgabe 1.3: Trennung der Variablen. Betrachtet werden die folgenden partiellen Differentialgleichungen:

$$\text{(i)}\ \ u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad \text{(ii)}\ \ u_{tt} + u_{xx} = 0, \qquad \text{(iii)}\ \ u_t = u_{xx}.$$

a) Für die obigen partiellen Differentialgleichungen konstruiere man Lösungen durch Trennung der Variablen, d.h. sie haben die Form $u(t, x) = T(t)X(x)$ für reellwertige, zweifach differenzierbare Funktionen T, X. (Hinweis: Nach Einsetzen des Lösungsansatzes in die PDGln trenne man die Variablen auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens und argumentiere, dass beide Seiten konstant sein müssen.)
b) Für die Wärmeleitungsgleichung (iii) bestimme man alle Lösungen von a), die zusätzlich $X(0) = X(1) = 0$ erfüllen. Damit konstruiere man eine Lösung von (iii), die folgende Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt:

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0,\ u(0, x) = 33.3 \sin(15\pi x)\,.$$

c) Für die Wellengleichung (i) bestimme man all Lösungen von (a), die zusätzlich $X(0) = X(l) = 0$ bei gegebenem $l > 0$ erfüllen. Man zeige, dass für alle diese Lösungen $u(t + \frac{2nl}{a}, x) = u(t, x)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

(bitte wenden)

Aufgabe 1.4 (schriftlich): Eindimensionale Wellengleichung.

a) Mithilfe der Koordinatentransformation $\xi_1 = x - at$, $\xi_2 = x + at$ bestimme man Lösungen $u = u(t,x)$ der im Raum eindimensionalen Wellengleichung:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0\,. \tag{1}$$

Lösungen u beschreiben die Auslenkung einer unendlich langen Saite.

b) Unter welchen Bedingungen ist $u(t,x) := f(x+at)+g(x-at)$ eine allgemeine Lösung von (1)? Man bestimme die Funktionen f, g so, dass die Anfangsbedingungen

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x) \tag{2}$$

erfüllt sind. Die Lösungsdarstellung bezeichnet man als Formel von d'Alembert.

c) Gezupfte Saite: Für die Anfangsauslenkung

$$u_0(x) := \begin{cases} 2 - 2|x| & \text{für } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

und die Anfangsgeschwindigkeit $u_1(x) = 0$ stelle man die Auslenkung $u(t,x)$ zu den Zeitpunkten $t = 0$, $t = 1/2$, $t = 1$ und $t = 3/2$ für zwei verschiedene Geschwindigkeiten graphisch dar.

Erste Übungsstunde: Montag, 16. April 2012, 11-13 Uhr, Raum RUD25, 4.007.

Aufgabe 1.4 ist in der Übung am 16.04.2012 in Zweiergruppen schiftlich abzugeben und wird in der darauffolgenden Woche besprochen.