

Algorithmen für regelmäßige Kettenbrüche

Bachelorarbeit von Stefan Scheel
Betreuer: Prof. Dr. W. Koepf

Universität Kassel

Oktober 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Endliche Kettenbrüche	7
2.1	Allgemeine Einführung des endlichen Kettenbruches	7
2.1.1	Konvergenten	12
2.1.2	Rekursionsformel der Konvergenten	13
2.1.3	Diophantische lineare Gleichung	16
2.1.4	Beziehungen zwischen den Konvergenten	20
3	Unendliche Kettenbrüche	22
3.1	Allgemeine Einführung des unendlichen Kettenbruches	22
3.1.1	Grenzwert des unendlichen Kettenbruches	22
3.1.2	Irrationale Zahlen	24
3.2	Algorithmus zur Berechnung von Kettenbrüchen	26
3.2.1	Kettenbruchentwicklung der Zahl π	28
3.2.2	Kettenbruchentwicklung der Zahl e	29
4	Approximationen mit Hilfe von Kettenbrüchen	31
4.1	Approximationen von irrationalen Zahlen	31
4.1.1	Kettenbruchentwicklung als beste Näherung einer irrationalen Zahl	32
5	Regelmäßige periodische Kettenbrüche	38
5.1	Rein- und gemischtperiodische Kettenbrüche	38
5.1.1	Quadratische Irrationalität	38
5.1.2	Reinperiodische Kettenbrüche	39
5.1.3	Gemischtperiodische Kettenbrüche	42
5.1.4	Verhältnisse zwischen einem rein- und gemischtperiodischen Kettenbruch	47
5.2	Der Satz von Lagrange	47
5.2.1	Formel zur Bestimmung der quadratischen Irrationalitäten . .	52
5.3	Inverse Periode	55
5.4	Quadratwurzel aus rationalen Zahlen	56
5.5	Anwendungen und Beispiele von periodischen Kettenbrüchen	58

5.5.1	Tafel für positive ganze Quadratwurzeln	58
5.5.2	Berechnung von periodischen Kettenbrüchen mit Hilfe des Algorithmus	60
6	Fazit	62
A	Tabelle	63

1 Einleitung

Die Theorie der Kettenbrüche ist ein wichtiges Werkzeug für die Analysis, der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Mechanik und besonders der Zahlentheorie. Eine spezielle Form der Kettenbrüche sind die regelmäßigen Kettenbrüche. Sie bilden auch die Klasse, die am besten erforscht ist. Sie werden in der Form

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}} := [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

dargestellt. Es ist zu beachten, dass alle Werte ganze Zahlen sind und die a_k für $k \geq 1$ sogar positive ganze Zahlen sind. Ein Kettenbruch, in dem die Zähler alle gleich 1 sind, wird als regelmäßig oder einfach bezeichnet.

Die Kettenbruchtheorie entwickelte sich aus dem Interesse, Brüche oder schwer fassbare Zahlen besser approximiert zu können. Ein Beispiel dafür ist *Christiaan Huygens*¹, er entwickelte ein Zahnradmodell für das Sonnensystem. Er musste aus den Umlaufzeiten der Planeten das Übersetzungsverhältnis der Zahnräder approximieren und dazu nutzte er Kettenbrüche. Der relative Fehler kann durch eine Kettenbruchapproximation mit nur wenigen Schritten sehr gering gehalten werden.

Schon die Chinesen näherten die Kreiszahl π durch Brüche an. Im Zeitalter des Computers ist die Näherung der Zahl π oder einer anderen irrationalen Zahl problemlos machbar, aber sie ist selten sinnvoll.

Bei Näherungsbrüchen soll ein möglichst kleiner Nenner und Zähler gegeben sein. Es kann gezeigt werden, dass die Näherungsbrüche einer reellen Zahl, die durch eine Kettenbruchentwicklung entstehen, die genaueste rationale Annäherung sind. Sie kann nur genauer gemacht werden, indem der Nenner vergrößert wird. Diese genaue Form der Zahlendarstellung bietet einem Computer eine einfachere Speichermöglichkeit. Beherrscht er nämlich Kettenbrüche und erkennt Periodizitäten, kann er jede Wurzel einer Zahl, die er exakt speichern kann, wieder exakt speichern.

Kettenbrüche sind auch eine angenehme Möglichkeit, algebraische Zahlen von transzendenten Zahlen zu unterscheiden. Aber zur Berechnung sind sie nicht geeignet, denn es gibt keinen Algorithmus zur Berechnung der Summen, Differenzen, Produkte oder Quotienten zweier Zahlen, falls sie in Kettenbruchdarstellung geschrieben sind. Es gibt auch viel effizientere Verfahren, um transzendente und algebraische Zahlen zu berechnen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen Überblick über die Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche zu geben. Der Leser soll die Eigenschaften und Grundalgorithmen der Kettenbruchtheorie kennenlernen und anhand von Beispielen und Anwendungen sehen, wie sie ermittelt werden können.

In Kapitel 2 werden ausgehend vom Euklidischen Algorithmus die endlichen regelmäßigen Kettenbrüche eingeführt. Es werden die Konvergenten eingeführt und ihre

¹Christiaan Huygens (* 14. April 1629 in Den Haag, Niederlande; gestorben 8. Juli 1695) war ein niederländischer Astronom, Mathematiker und Physiker.

Rekursionsformel zur Berechnung. Eine spezielle Anwendung zeigt sich mit der Berechnung einer diophantischen Gleichung. Zum Abschluss des Kapitels wird die Beziehung zwischen den Konvergenten eingeführt.

Kapitel 3 befasst sich dann mit unendlichen regelmäßigen Kettenbrüchen. Hier wird die Eindeutigkeit eines Kettenbruches vorgestellt und weiter, dass jeder unendliche Kettenbruch eine irrationale Zahl darstellt. Abschließend wird der Kettenbruch-Algorithmus vorgestellt, mit dessen Hilfe jede irrationale Zahl in einen Kettenbruch umgewandelt werden kann.

In Kapitel 4 werden Approximationsverfahren vorgestellt, die zeigen wie dicht ein Bruch einer Kettenbruchentwicklung an der gesuchten Zahl liegt. Weitergehend wird bewiesen, dass ein Kettenbruch die beste rationale Näherung liefert, in dem Sinne, dass eine Verbesserung nur durch Erhöhung des Nenners erzielt werden kann.

Das letzte Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit einer speziellen Form der unendlichen regelmäßigen Kettenbrüche, den periodischen Kettenbrüchen. Es werden rein- und gemischtperiodische Kettenbrüche vorgestellt. Weiter wird der Zusammenhang zwischen periodischen Kettenbrüchen und quadratischen Irrationalitäten gezeigt. An dieser Stelle wird auch ein Algorithmus zur Umwandlung von Kettenbrüchen angegeben. Der interessante Aspekt der inversen Periode wird erläutert und es wird darauf eingegangen, welche Form Kettenbrüche von Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen haben. Das Kapitel endet mit Anwendungen und Beispiele der periodischen Kettenbrüche.

Die in der Arbeit vorgestellten Algorithmen sind in der Arbeit selbst meistens nur theoretisch dargestellt. Auf einer beiliegenden CD sind die Algorithmen in *Mathematica* implementiert und alle in der Arbeit vorkommenden Beispielaufgaben sind auch in einem *Mathematica*-Notebook vorgeführt.

2 Endliche Kettenbrüche

2.1 Allgemeine Einführung des endlichen Kettenbruches

In diesem Abschnitt betrachten wir endlich gestaffelte Kettenbrüche. Die Grundlage dieses Abschnittes ist Literatur aus [Zip93] Abschnitt 2 und [Bur98] Kapitel 14.2.

Fibonacci² führte zu seiner Zeit eine Art von Kettenbrüchen ein. Das Symbol $\frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5}$ wurde beispielsweise als Abkürzung für

$$\frac{13}{30} = \frac{1 + \frac{1 + \frac{1}{5}}{4}}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}$$

benutzt. Heutzutage schreiben wir Kettenbrüche jedoch üblicherweise in absteigender Form:

$$\frac{95}{43} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}$$

Ein endlich mehrfach gestaffelter Ausdruck dieser Art wird endlicher einfacher Kettenbruch genannt.

Definition 2.1 (Endliche Kettenbrüche) Ein endlicher Kettenbruch ist ein Bruch der Form

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{\ddots}{a_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}}}}$$

in welchem $a_0, a_1, \dots, a_n$ und $b_1, b_2, \dots, b_n$ reelle Zahlen darstellen, die – mit Ausnahme möglicherweise von a_0 – alle positiv sind. Die Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ heißen Teilnenner des Bruches. Der Kettenbruch heißt *regelmäßig* oder *einfacher Kettenbruch*, wenn alle b_k gleich 1 und alle a_k ganze Zahlen sind.

Streng genommen ist die letzte Zahl a_n eigentlich kein Teilnenner mehr, sie wird aber dennoch dazu gezählt. Im Weiteren betrachten wir jetzt nur noch regelmäßige Kettenbrüche, in denen alle b_i gleich 1 sind, daher werden wir im weiteren Verlauf das Wort „regelmäßig“ oder „einfach“ nicht immer explizit angeben.

Es ist einleuchtend, dass jeder endliche Kettenbruch eine rationale Zahl darstellt, weil wir ihn einfach zusammenfassen können:

²Leonardo von Pisa besser bekannt unter dem Namen Fibonacci wurde zwischen 1170 und 1180 geboren. Wie sein Geburtsjahr ist auch sein Todesjahr nicht exakt bekannt. Die letzte Nachricht über ihn ist ein Dekret aus dem Jahr 1240.

Beispiel 2.1

Wir fassen einen endlichen Kettenbruch zu einer rationalen Zahl zusammen:

$$2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{7}{9}} = 2 + \frac{9}{43} = \frac{95}{43}$$

Die umgekehrte Richtung wollen wir nun in einem Satz festhalten:

Satz 2.2 *Jede rationale Zahl kann als endlicher Kettenbruch geschrieben werden.*

Wir werden im folgenden Beweis sehen, dass Satz 2.2 ein Algorithmus ist, denn mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus lässt sich jede rationale Zahl als endlicher Kettenbruch schreiben.

Beweis: Sei a/b eine rationale Zahl mit $a, b > 0$. Wir bestimmen nun den größten gemeinsamen Teiler von a und b mit dem Euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} a &= a_0 b + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b &= a_1 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= a_2 r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= a_{n-1} r_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= a_n r_n + 0. \end{aligned}$$

Da die r_k positiv sind und $b > 0$ vorausgesetzt wurde, können wir davon ausgehen, dass alle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ positiv sind. Nun kann das Gleichungssystem in folgende Form umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} a/b &= a_0 + r_1/b = a_0 + 1/(b/r_1), \\ b/r_1 &= a_1 + r_2/r_1 = a_1 + 1/(r_1/r_2), \\ r_1/r_2 &= a_2 + r_3/r_2 = a_2 + 1/(r_2/r_3), \\ &\vdots \\ r_{n-2}/r_{n-1} &= a_{n-1} + r_n/r_{n-1} = a_{n-1} + 1/(r_{n-1}/r_n), \\ r_{n-1}/r_n &= a_n. \end{aligned}$$

Setzen wir nun b/r_1 aus der zweiten Gleichung in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{b/r_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{r_1/r_2}}.$$

In die entstandene Gleichung setzen wir dann für den Wert r_1/r_2 unsere dritte Gleichung ein. Indem wir auf diese Weise fortfahren, erhalten wir nach endlich vielen

Schritten schließlich:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Dies zeigt uns, dass jede rationale Zahl zu einem endlichen Kettenbruch umgeformt werden kann. $\square$

Die programmierte Funktion **RationalInKettenbruch** benutzt die im Beweis beschriebene Division mit Rest und errechnet damit die Teilnenner a_k . Diese werden in einer Liste abgespeichert und später als Resultat für unseren Kettenbruch ausgegeben.

Wir verdeutlichen unser Ergebnis aus dem Beweis mit einem weiteren Beispiel:

Beispiel 2.2

Der Euklidische Algorithmus wird auf die Zahlen 19 und 51 angewendet und dadurch formen wir den Bruch 19/51 in einen Kettenbruch um:

$$\begin{aligned} 51 &= 2 \cdot 19 + 13 & \text{oder} & \quad 51/19 = 2 + 13/19, \\ 19 &= 1 \cdot 13 + 6 & \text{oder} & \quad 19/13 = 1 + 6/13 \\ 13 &= 2 \cdot 6 + 1 & \text{oder} & \quad 13/6 = 2 + 1/6 \\ 6 &= 6 \cdot 1 + 0 & \text{oder} & \quad 6/1 = 6. \end{aligned}$$

Nun nehmen wir die passende Substitution vor und erhalten folgende Kettenbruchentwicklung:

$$\begin{aligned} \frac{19}{51} &= \frac{1}{(51/19)} = \frac{1}{2 + \frac{13}{19}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{19}{13}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{6}{13}}} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13}{6}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}}}. \end{aligned}$$

Da Kettenbrüche sehr unhandlich zu schreiben sind, führen wir folgende Notation ein.

Notation 2.3 Ein einfacher endlicher Kettenbruch wird in der Form dargestellt:

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots \frac{1}{a_n}}},$$

in der nur a_0 und die Teilnenner $a_1, \dots, a_n$ vorkommen.

Das Anfangsglied a_0 ist somit der ganzzahlige Anteil des Kettenbruches, deshalb wird a_0 in der Notation mit einem „;“ von den anderen Teilennern getrennt geschrieben.

Eine rationale Zahl ist als endlicher einfacher Kettenbruch nicht eindeutig darstellbar. Wegen

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}$$

gibt es eine Darstellung mit einer geraden Anzahl und eine mit einer ungeraden Anzahl von Teilennern.

Satz 2.4 Ein endlicher einfacher Kettenbruch ist bis auf diese zwei Darstellungen

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_n - 1, 1]$$

eindeutig.

Es gilt $a_0 = 0$, wenn der Wert des Bruches positiv, aber kleiner als 1 ist.

Beweis: Der Beweis, dass ein endlicher einfacher Kettenbruch zwei Darstellungen hat ist sehr schnell gezeigt:

Ist der letzte Teilnenner a_n eine Zahl, die größer als 1 ist, so gilt

$$a_n = (a_n - 1) + 1 = (a_n - 1) + \frac{1}{1},$$

wobei $a_n - 1$ eine positive ganze Zahl ist. Wir erhalten die Darstellung $a_n = [a_n - 1; 1]$ und in der Gesamtdarstellung sieht es wie folgt aus:

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1].$$

Falls auf der anderen Seite $a_n = 1$ vorliegt, gilt:

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} + \frac{1}{1} = a_{n-1} + 1.$$

Dann gilt $[a_{n-1}; 1] = a_{n-1} + 1$, wobei $a_{n-1} + 1$ wiederum eine ganze positive Zahl ist und für die Gesamtdarstellung gilt:

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1].$$

□

Den Beweis für die Eindeutigkeit der Kettenbruchdarstellung wird im Abschnitt 3.1.2 Satz 3.5 für unendliche Kettenbrüche bewiesen. Da der Beweis für endliche Kettenbrüche analog geführt werden kann, werden wir in diesem Abschnitt nur auf den Beweis zu Satz 3.5 verweisen und es nicht weiter beweisen.

Jede rationale Zahl hat also zwei Darstellungen als einfacher Kettenbruch, eine mit einer geraden Anzahl und eine mit einer ungeraden Anzahl von Teilennern, wobei dies die einzigen beiden Darstellungen sind.

Die Funktionen **UngeradeAnzahlTeilnenner** und **GeradeAnzahlTeilnenner** verwenden das im Beweis zu Satz 2.4 gezeigte Verfahren, um einen Kettenbruch mit gerader Anzahl von Teilennern a_k in einen mit einer ungeraden Anzahl umzuwandeln und umgekehrt. Diese Funktion brauchen wir, denn wenn wir einen Bruch in einen Kettenbruch entwickeln, kann es passieren, dass das Ergebnis nicht die gewünschte Teilnenneranzahl hat. Indem wir dann die entsprechende Funktion anwenden, erhalten wir das gewünschte Resultat.

Beispiel 2.3

Wir wollen anhand der Kettenbruchentwicklung für $19/51$ die verschiedenen Darstellungen vorführen. Aus Beispiel 2.2 kennen wir die Werte für die a_k von $19/51$. Der Kettenbruch kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{19}{51} = [0; 2, 1, 2, 6] = [0; 2, 1, 2, 5, 1].$$

Wir können den Kettenbruch auch mit der programmierten Funktion errechnen:

```
In[1]:= RationalInKettenbruch[19/51]
```

```
Out[1]= {0, 2, 1, 2, 6}
```

Wollen wir nun aber eine gerade Anzahl von Teilennern in unserem Ergebnis, wenden wir einfach die Funktion **GeradeAnzahlTeilnenner** und erhalten:

```
In[2]:= GeradeAnzahlTeilnenner[{0, 2, 1, 2, 6}]
```

```
Out[2]= {0, 2, 1, 2, 5, 1}
```

Wir wollen uns noch einem weiteren Beispiel mit **RationalInKettenbruch** widmen:

Beispiel 2.4

In diesem Beispiel betrachten wir den Unterschied zwischen der in *Mathematica* eingebauten Funktion und der implementierten. Die Funktion **RationalInKettenbruch** gibt einen Kettenbruch nach Definition 2.1 aus. Für diese ist der Kettenbruch nach Satz 2.4 eindeutig. *Mathematica* gibt den Kettenbruch aber nach einer viel allgemeineren Definition aus, dennoch stellen beide die gleiche rationale Zahl dar. Diese Unterschiede sehen wir, wenn wir eine negative rationale Zahl in einen Kettenbruch umformen. Wir betrachten das Beispiel $-19/51$:

```
In[3]:= RationalInKettenbruch[-19/51]
```

```
Out[3]= {-1, 1, 1, 1, 2, 6}
```

```
In[4]:= ContinuedFraction[-19/51]
```

```
Out[4]= {0, -2, -1, -2, -6}
```

```
In[5]:= FromContinuedFraction[{-1, 1, 1, 1, 2, 6}]
```

```
Out[5]= - $\frac{19}{51}$ 
```

```
In[6]:= FromContinuedFraction[{0, -2, -1, -2, -6}]
```

```
Out[6]= - $\frac{19}{51}$ 
```

Wir haben zur Umformung der Kettenbrüche in eine rationale Zahl, die in *Mathematica* eingebaute Funktion verwendet, damit wir ein einheitliches Ergebnis erlangen. Mit der implementierten Funktion **KettenbruchInRational** hätte wir das gleiche Ergebnis erhalten.

Der Unterschied der Funktionen besteht darin, dass unsere implementierte Funktion **RationalInKettenbruch** den Kettenbruch nach Definition 2.1 berechnet und daher nur a_0 negativ sein darf, wobei die Funktion von *Mathematica* bei negativen Werten vermutlich den Kettenbruch für die positive Zahl bestimmt und dann vor alle Teilnenner a_k ein Minus schreibt. Wir sehen uns dazu noch folgendes Beispiel an, welches unsere Vermutung bestärkt:

```
In[7]:= ContinuedFraction[-51/19]
```

```
Out[7]= {-2, -1, -2, -6}
```

2.1.1 Konvergenten

Einer der Punkte, auf die wir hinaus wollen, ist zu zeigen, dass diophantische Gleichungen mit Hilfe einer Kettenbruchentwicklung gelöst werden können. Für dieses Problem brauchen wir aber einige Eigenschaften der sogenannten Konvergenten der Kettenbrüche und diese wollen wir in diesem Abschnitt zeigen.

Definition 2.5 *Der Kettenbruch, der aus der Kettenbruchentwicklung $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ durch einen Abbruch nach dem k -ten Teilnenner a_k entsteht, heißt k -te Konvergente oder k -ter Näherungsbruch des gegebenen Kettenbruches und wird mit K_k bezeichnet. Die Darstellung sieht wie folgt aus:*

$$K_k = [a_0; a_1, \dots, a_k], \quad 1 \leq k \leq n.$$

Die 0-te Konvergente K_0 ist die Zahl a_0 .

Es ist offensichtlich, dass die letzte Konvergente K_n die rationale Zahl ist, die den ganzen Kettenbruch darstellt.

Aus der Definition folgt eine weitere wichtige Eigenschaft: Ist $k < n$ und wird a_k durch $a_k + (1/a_{k+1})$ ersetzt, dann wird die Konvergente K_k zur Konvergenten K_{k+1} :

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + 1/a_{k+1}] = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}] = K_{k+1}. \quad (2.1)$$

Beispiel 2.5

Um weiter Klarheit über die Aussage, die Definition 2.5 mit sich bringt, zu erlangen, werden wir nun die Konvergenten von unserem altbewährten Beispiel 19/51 berech-

nen:

$$\begin{aligned}
K_0 &= 0, \\
K_1 &= [0; 2] = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\
K_2 &= [0; 2, 1] = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{3}, \\
K_3 &= [0; 2, 1, 2] = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{3}{8}, \\
K_4 &= [0; 2, 1, 2, 6] = \frac{19}{51}.
\end{aligned}$$

An diesem Beispiel können wir eine weitere Eigenschaft der Kettenbrüche erkennen. Die Konvergenten K_0 bis K_3 sind abwechselnd kleiner und größer als $19/51$ und jede Konvergente ist dichter an der gesuchten rationalen Zahl als ihr Vorgänger. Dieses Phänomen werden wir später genauer untersuchen.

2.1.2 Rekursionsformel der Konvergenten

Die Berechnung der Konvergenten eines Kettenbruches $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ kann erheblich vereinfacht werden, indem eine Rekursionsformeln für den Zähler und den Nenner einführt wird. Weitere Details zu diesem Abschnitt sind in [Per39] zu finden.

Definition 2.6 (Bildungsgesetz der Konvergenten) Dafür definieren wir P_k und Q_k , für $0 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned}
P_0 &= a_0 & Q_0 &= 1 \\
P_1 &= a_1 a_0 + 1 & Q_1 &= a_1 \\
P_k &= a_k P_{k-1} + P_{k-2} & Q_k &= a_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \quad (2 \leq k \leq n).
\end{aligned}$$

Aus der Definition können wir entnehmen, dass der Nenner Q_k mindestens so schnell größer wird wie die *Fibonacci* Zahlen. Denn es gilt $a_k \geq 1$ für $k \geq 1$, daraus folgt $Q_k \geq 1$. Damit kann Q_k beliebig groß werden. Der Wert P_k kann nur für $a_0 \neq 0$ oder über den Betrag beliebig groß werden.

Mit Hilfe des Bildungsgesetzes der Konvergenten arbeitet die programmierte Funktion **Konvergenten**. Die Funktion erstellt aus der Teilnennerliste die Konvergenten K_k , wobei $0 \leq k \leq n$ (n ist der Index des letzten Teilnenners). Die Funktion ist so programmiert, dass, wenn wir hinter der Teilnennerliste $\mathbf{x}$ den Index k für die gesuchte Konvergente eingeben, nur die Konvergente K_k ausgegeben wird.

Mit den speziellen Funktionen **KonvergentenP** und **KonvergentenQ** können wir die Liste der P_k und Q_k erhalten. Wie in der Funktion **Konvergenten** ist es auch bei diesen beiden Funktionen möglich, durch eine Indexeingabe das gesuchte P_k bzw. Q_k als Ausgabe zu erhalten.

Die ersten Konvergenten von $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ können dann sehr leicht berechnet werden:

$$\begin{aligned} K_0 &= a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{P_0}{Q_0}, \\ K_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \frac{P_1}{Q_1}, \\ K_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_0(a_2 a_1 + 1) + a_2}{a_2 a_1 + 1} = \frac{a_2(a_1 a_0 + 1) + 1}{a_2 a_1 + 1} = \frac{P_2}{Q_2}. \end{aligned}$$

Satz 2.7 Die k -te Konvergente K_k eines einfachen Kettenbruches der Form $K_k = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ hat den Wert:

$$K_k = \frac{P_k}{Q_k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Beweis: Wir werden den Satz per Induktion beweisen. Wie wir gesehen haben, gilt die Formel für $k = 0, 1, 2$, wodurch unser Induktionsanfang erfüllt ist. Daher nehmen wir an, dass die Formel auch allgemein für k mit $2 \leq k < n$ gilt. Es gilt folgende Gleichung:

$$K_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{a_k P_{k-1} + P_{k-2}}{a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}} = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k].$$

Nun beachten wir, dass die Zahlen P_{k-1} , P_{k-2} , Q_{k-1} und Q_{k-2} allein von den ersten $k-1$ Teilennern $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ und a_0 abhängig sind, aber nicht von a_k . Der rechte Teil der Formel bleibt in Kraft, wenn wir a_k durch den Wert $a_k + 1/a_{k+1}$ ersetzen. Dieses Umschreiben verändert nichts, da die Definition 2.1 von $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ nicht besagt, dass der letzte Teilnenner ein ganze Zahl sein muss. Durch das Ersetzen erhalten wir nun folgende Formel:

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}] = \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})P_{k-1} + P_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})Q_{k-1} + Q_{k-2}}.$$

Wie wir in Gleichung (2.1) gesehen haben, können wir die Konvergente K_k in die Konvergente K_{k+1} überführen:

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})P_{k-1} + P_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})Q_{k-1} + Q_{k-2}} \\ &= \frac{\frac{P_{k-1}}{a_{k+1}} + a_k P_{k-1} + P_{k-2}}{\frac{Q_{k-1}}{a_{k+1}} + a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1}(a_k P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1}}{a_{k+1}(a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) + Q_{k-1}} = \frac{a_{k+1}P_k + P_{k-1}}{a_{k+1}Q_k + Q_{k-1}} = \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}. \end{aligned}$$

Wir haben also genau dieselbe Gleichung, mit der wir begonnen haben, für $k+1$ erhalten und damit ist die Induktion abgeschlossen und unser Satz bewiesen. $\square$

Unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Kettenbrüche können wir nun die Hilfs-
werte für P_{-1} und Q_{-1} und für P_{-2} und Q_{-2} einführen. Dies wird uns bei einigen
späteren Beweisen sehr hilfreich sein.

Tabelle 2.1

Für die ersten Konvergenten entsteht folgende Tabelle³:

k	-2	-1	0	1	2
$\frac{P_k}{Q_k}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{a_0}{1}$	$\frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$	$\frac{a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1}$

Der Wert eines einfachen Kettenbruches ist immer kleiner als ∞ und größer als 0, wenn $a_0 \geq 0$. Diese Aussage gilt immer für alle Teilnenner a_k mit $1 \leq k \leq n$.

Nun betrachten wir ein weiteres Mal unser Beispiel:

Beispiel 2.6

Mit den Rekursionsformeln erhalten wir für unser Beispiel 19/51 folgende Ergebnisse:

$$\begin{array}{ll}
 P_0 &= 0 & Q_0 &= 1 \\
 P_1 &= 2 \cdot 0 + 1 = 1 & Q_1 &= 2 \\
 P_2 &= 1 \cdot 1 + 0 = 1 & Q_2 &= 1 \cdot 2 + 1 = 3 \\
 P_3 &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 & Q_3 &= 2 \cdot 3 + 2 = 8 \\
 P_4 &= 6 \cdot 3 + 1 = 19 & Q_4 &= 6 \cdot 8 + 3 = 51
 \end{array}$$

Die Konvergenten, die wir nun für den Kettenbruch $[0; 2, 1, 2, 6]$ erhalten, sind:

$$K_0 = \frac{P_0}{Q_0} = 0, \quad K_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{2}, \quad K_2 = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{3}, \quad K_3 = \frac{P_3}{Q_3} = \frac{3}{8}, \quad K_4 = \frac{P_4}{Q_4} = \frac{19}{51}.$$

Dieses Beispiel kann auch mit Hilfe der Funktion **Konvergenten[x]** gelöst werden. Aber zunächst bestimmen wir die Listen der P_k und Q_k :

```
In[8]:= KonvergentenP[{0, 2, 1, 2, 6}]
```

```
Out[8]= {0, 1, 1, 3, 19}
```

```
In[9]:= KonvergentenQ[{0, 2, 1, 2, 6}]
```

```
Out[9]= {1, 2, 3, 8, 51}
```

Wenn wir nun die Funktion **Konvergenten[x]** anwenden, erhalten wir die Liste aller Konvergenten:

```
In[10]:= Konvergenten[{0, 2, 1, 2, 6}]
```

```
Out[10]= {0, 1/2, 1/3, 3/8, 19/51}
```

Wir fahren fort, indem wir uns weitere Eigenschaften der Konvergenten ansehen.

Satz 2.8 Sei $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ ein einfacher Kettenbruch, dann gilt für P_k und Q_k :

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (2.2)$$

$$P_k Q_{k-2} - P_{k-2} Q_k = a_k (-1)^{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.3)$$

³Die Tabelle befindet sich in [Zip93], Abschnitt 2.1.

Beweis: Der Beweis für Gleichung (2.2) wird mit einer einfachen Induktion geführt. Für $k = 1$ gilt:

$$P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = (a_1 a_0 + 1) \cdot 1 - a_1 a_0 = 1 = (-1)^{1-1}$$

Wir nehmen an, dass die Gleichung auch für ein beliebiges k mit $1 \leq k < n$ gilt und beweisen die Aussage für $k + 1$:

$$\begin{aligned} P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} &= (a_{k+1} P_k + P_{k-1}) Q_k - (a_{k+1} Q_k + Q_{k-1}) P_k \\ &= -(P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k) \\ &= -(-1)^{k-1} = (-1)^k. \end{aligned}$$

Um Gleichung (2.3) unseres Satzes zu beweisen, müssen wir die Gleichung (2.2) wie folgt umschreiben:

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_{k-1} Q_k}.$$

Danach können wir mit der Gleichung (2.3) wie folgt weiter rechnen:

$$\begin{aligned} \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} &= \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} + \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{Q_{k-1} Q_k} + \frac{(-1)^k}{Q_{k-2} Q_{k-1}} \\ &= \frac{(-1)^k}{Q_{k-2} Q_k} \left[\frac{Q_k - Q_{k-2}}{Q_{k-1}} \right] \\ &= a_k \frac{(-1)^k}{Q_{k-2} Q_k}. \end{aligned}$$

Es gilt $\left[\frac{Q_k - Q_{k-2}}{Q_{k-1}} \right] = a_k$, dies gilt nach unserem Bildungsgesetz 2.6 für Q_k . Durch Multiplizieren mit dem Nenner erhalten wir Gleichung (2.3) aus Satz 2.8 und damit haben wir beide Gleichungen bewiesen. $\square$

Eine wichtige Eigenschaft, die aus dem Satz 2.8 hervorgeht, ist, dass Zähler und Nenner jeder Konvergenten teilerfremd sind. Damit sind unsere Brüche, die wir bei der Konvergentenberechnung erhalten, immer vollständig gekürzt.

Korollar 2.9 P_k und Q_k sind für $1 \leq k \leq n$ teilerfremd.

Beweis: Sei $d = \text{ggT}(P_k, Q_k)$, dann gilt mit der Formel $P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}$ für $1 \leq k \leq n$ die Teilerbeziehung $d \mid (-1)^{k-1}$. Das erzwingt $d = 1$ und somit sind P_k und Q_k teilerfremd. $\square$

2.1.3 Diophantische lineare Gleichung

Eine wichtige Anwendung der Kettenbruchtheorie ist die Bestimmung einer allgemeinen Lösung der diophantischen Gleichung:

$$ax + by = r, \tag{2.4}$$

wobei a , b und r gegebene ganze Zahlen ($\neq 0$) sind und die ganzzahligen Unbekannten x , y gesucht werden. Wenn a und b einen gemeinsamen Teiler d haben, ist die Aufgabe nur lösbar, wenn auch r durch d teilbar ist.

Wir müssen uns also nur mit dem Fall teilerfremder Koeffizienten a und b befassen, denn sollte der Fall vorliegen, dass $\text{ggT}(a, b) = d > 1$, würden wir folgende Gleichung erhalten:

$$\frac{a}{d} x - \frac{b}{d} y = \frac{r}{d}. \quad (2.5)$$

Indem wir den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a , b und r aus der Gleichung herausdividiert haben, können wir diesen Fall ausschließen. Daher beschränken wir uns auf die Gleichung:

$$ax + by = r, \text{ mit } \text{ggT}(a, b) = 1. \quad (2.6)$$

Eine Lösung erhalten wir nun, indem wir zunächst den Spezialfall $r = 1$ betrachten. Für diesen erhalten wir nämlich zwei Zahlen x_0 und y_0 , die durch die Multiplikation mit r eine allgemeine Lösung unserer Gleichung

$$a(rx_0) + b(ry_0) = r$$

präsentieren und $x = rx_0$ und $y = ry_0$ erfüllen dann unsere Gleichung $ax + by = r$.

Das Zahlenpaar x_0 und y_0 , welches unsere Gleichung $ax_0 + by_0 = 1$ erfüllt, finden wir mit einer einfachen Kettenbruchentwicklung von a/b :

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Unsere letzten beiden Konvergenten sind demzufolge:

$$K_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \quad \text{und} \quad K_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}.$$

Es gilt $\text{ggT}(P_n, Q_n) = 1 = \text{ggT}(a, b)$ nach unserer Voraussetzung für die Teilerfremdheit und Korollar 2.9. Aus dieser Eigenschaft können wir schließen, dass

$$P_n = a \quad \text{und} \quad Q_n = b$$

gilt. Daher gilt auch $aQ_n = bP_n$. Daraus schließen wir, dass a und Q_n den Term bP_n teilen, aber nach unserer Eigenschaft $\text{ggT}(P_n, Q_n) = 1 = \text{ggT}(a, b)$ geht das nur, wenn

$$a \mid P_n \quad \text{und} \quad Q_n \mid b$$

gilt. Es existieren $s, t \in \mathbb{Z}$, so dass $as = P_n$ und $Q_n t = b$ gilt. Damit erhalten wir durch Einsetzen $aQ_n = bP_n = (Q_n t)(as)$, also muss $s = t = 1$ sein (allgemein gilt $s = t = \pm 1$). Dies bedeutet $P_n = a$ und $Q_n = b$ (oder $P_n = -a$ und $Q_n = -b$). Wir wissen aus Satz 2.8, dass

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}$$

gilt und mit den Gleichungen $P_n = a$ und $Q_n = b$ erhalten wir:

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Für ungerade n erhalten wir für die Gleichung $ax_0 + by_0 = 1$ die spezielle Lösung $x_0 = Q_{n-1}$ und $y_0 = -P_{n-1}$ und für gerade n die spezielle Lösung $x_0 = -Q_{n-1}$ und $y_0 = P_{n-1}$. Die allgemeine Lösung für x und y lautet:

$$x = x_0 + bt \quad \text{und} \quad y = y_0 - at, \quad \text{mit } t \in \mathbb{Z}.$$

Im Falle $P_n = -a$ und $Q_n = -b$ erhalten wir genau dasselbe Ergebnis bis auf die daraus resultierenden Vorzeichenwechsel.

Die diophantische Gleichung kann auch mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus gelöst werden. Eine Kettenbruchrechnung ist nicht nötig um die Lösung zu bestimmen, aber sie ist ein schöner Weg, um anschaulich zum Ergebnis zu gelangen. Am Ende des folgenden Beispiels werden wir auch den Lösungsweg mit dem Euklidischen Algorithmus kurz vorstellen.

Beispiel 2.7

Zur Verdeutlichung sehen wir uns ein Beispiel an. Gegeben ist die diophantische Gleichung

$$172x + 20y = 1000.$$

Die Gleichung soll nun durch eine einfache Kettenbruchentwicklung gelöst werden. Dazu bestimmen wir zuerst den ggT(172, 20) = 4, damit wir die Gleichung, wie folgt umschreiben können

$$43x + 5y = 250.$$

Als nächstes suchen wir eine ganzzahlige Lösung für die spezielle Gleichung

$$43x + 5y = 1.$$

Dazu schreiben wir $43/5$ (oder $5/43$) in einen einfachen Kettenbruch um. Durch Anwenden des Euklidischen Algorithmus erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 43 &= 8 \cdot 5 + 3, \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2, \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1, \\ 2 &= 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Es ergibt sich der Kettenbruch

$$\frac{43}{5} = [8; 1, 1, 2] = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Wir erhalten nun die Konvergenten:

$$K_0 = \frac{8}{1}, \quad K_1 = \frac{9}{1}, \quad K_2 = \frac{17}{2}, \quad K_3 = \frac{43}{5}.$$

Damit sind $P_2 = 17$, $Q_2 = 2$, $P_3 = 43$ und $Q_3 = 5$. Dies setzen wir in unsere Gleichung

$$P_3 Q_2 - Q_3 P_2 = (-1)^{3-1}$$

ein und erhalten die Gleichung

$$43 \cdot 2 - 5 \cdot 17 = 1.$$

Indem wir dann unsere Gleichung mit 250 multiplizieren, erhalten wir eine spezielle Lösung unserer diophantischen Gleichung:

$$43 \cdot 500 + 5 \cdot (-4250) = 250. \quad (2.7)$$

Daraus ergibt sich mit $x = 500$ und $y = -4250$ eine spezielle Lösung für unsere Gleichung $43x + 5y = 250$. Die allgemeine Lösung für unsere diophantische Gleichung ist:

$$x = 500 + 5t, \quad y = -4250 - 43t, \quad \text{mit } t \in \mathbb{Z}.$$

Wie erwähnt, brauchen wir die Kettenbruchentwicklung nicht, um die Lösung zu bestimmen. Wir bestimmen mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der linearen diophantischen Gleichung:

$$172x + 20y = 1000.$$

Für die Koeffizienten 172 und 20 ergibt sich:

$$\begin{aligned} 172 &= 8 \cdot 20 + 12, \\ 20 &= 1 \cdot 12 + 8, \\ 12 &= 1 \cdot 8 + 4, \\ 8 &= 2 \cdot 4. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Damit ist der $\text{ggT}(172, 20) = 4$. Wegen (2.5) und (2.6) wissen wir, dass die diophantische Gleichung nur eine Lösung besitzt, wenn r durch den ggT teilbar ist. Dies ist hier der Fall, $4|1000$. Um die Lösung zu finden, müssen wir nur eine lineare Kombination von 4 durch die beiden Zahlen $a = 172$ und $b = 20$ finden. Diese finden wir, indem wir uns rückwärts durch unsere Gleichungen (2.8) arbeiten:

$$\begin{aligned} 4 &= 12 - 8 \\ &= 12 - (20 - 12) \\ &= 2 \cdot 12 - 20 \\ &= 2 \cdot (172 - 8 \cdot 20) - 20 \\ &= 2 \cdot 172 + (-17) \cdot 20 \end{aligned}$$

Wir müssen die Gleichung jetzt nur noch mit 250 multiplizieren und wir haben eine Lösung für die Gleichung erhalten:

$$1000 = 250 \cdot 4 = 250 \cdot (2 \cdot 172 + (-17) \cdot 20) = 500 \cdot 172 + (-4250) \cdot 20.$$

Diese spezielle Lösung $x = 500$ und $y = -4250$ entspricht unserer Lösung (2.7).

2.1.4 Beziehungen zwischen den Konvergenten

Als nächstes werden wir genauer auf die Beziehung zwischen den Konvergenten mit geraden und ungeraden Indizes eingehen. Dazu betrachten wir zuerst das folgende Lemma.

Lemma 2.10 *Ist Q_k der Nenner der k -ten Konvergente K_k eines einfachen Kettenbruches $[a_0; a_1, \dots, a_n]$, so gilt $Q_0 \leq Q_1$ und $Q_{k-1} < Q_k$ für $2 \leq k \leq n$.*

Beweis: Wir beweisen auch diese Eigenschaft mit einer einfachen Induktion. Der Induktionsanfang für $k = 1$ ist schnell durch

$$Q_0 = 1 \leq a_1 = Q_1$$

gezeigt. Nehmen wir nun an, dass es auch für ein beliebiges, aber festes k mit $1 \leq k < n$ gilt. Wir beweisen es für $k + 1$:

$$Q_{k+1} = a_{k+1}Q_k + Q_{k-1} > a_{k+1}Q_k \geq 1 \cdot Q_k = Q_k,$$

damit ist die Ungleichheit für alle k für $2 \leq k \leq n$ gezeigt. $\square$

Satz 2.11 *Bei einem einfachen Kettenbruch bilden die Konvergenten mit geraden Indizes eine streng monoton wachsende Folge:*

$$K_0 < K_2 < K_4 < \dots$$

Die Konvergenten mit ungeraden Indizes bilden eine streng monoton fallende Folge:

$$K_1 > K_3 > K_5 > \dots$$

Jede Konvergente mit ungeradem Index ist größer als jede Konvergente mit geradem Index:

$$K_{2s} < K_{2r+1}, \quad s, r \in \mathbb{N}_0.$$

Somit schließen zwei aufeinanderfolgende Konvergenten die gesuchte rationale Zahl ein.

Beweis: Mit unserem Wissen aus Satz 2.7 und Gleichung (2.2) aus Satz 2.8 erhalten wir für $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} K_{k+2} - K_k &= (K_{k+2} - K_{k+1}) + (K_{k+1} - K_k) \\ &= \left(\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}} - \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \right) + \left(\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} \right) \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{Q_{k+2}Q_{k+1}} + \frac{(-1)^k}{Q_{k+1}Q_k} = \frac{(-1)^k(Q_{k+2} - Q_k)}{Q_{k+2}Q_{k+1}Q_k}. \end{aligned}$$

Für alle $k \geq 0$ ist $Q_k > 0$ und $Q_{k+2} - Q_k > 0$, dies geht aus Lemma 2.10 hervor. Es ist offensichtlich, dass dann $K_{k+2} - K_k$ dasselbe Vorzeichen wie $(-1)^k$ haben muss. Ist k nun also eine gerade Zahl $k = 2j$ für $j \in \mathbb{N}_0$, so folgt $K_{2j+2} > K_{2j}$ und es gilt

$$K_0 < K_2 < K_4 < \dots \quad (2.9)$$

Wenn k eine ungerade Zahl $k = 2j + 1$ für $j \in \mathbb{N}_0$ ist, gilt auf der anderen Seite $K_{2j+3} < K_{2j+1}$ und es folgt

$$K_1 > K_3 > K_5 > \dots \quad (2.10)$$

Damit sind die Behauptungen unserer beiden Ungleichungsketten bewiesen.

Es ist zu zeigen, dass jede Konvergente mit ungeradem Index größer als jede Konvergente mit geradem Index ist. Wie schon im Beweis zu Satz 2.8 schreiben wir unsere Rekursionsformel um und erhalten mit Gleichung (2.2) aus Satz 2.8:

$$K_k - K_{k-1} = \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_{k-1}Q_k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Da $Q_{k-1}Q_k$, wie aus dem Bildungsgesetz 2.6 bekannt ist, immer größer 0 ist, folgt aus Gleichung (2.11), dass $K_0 < K_1$, $K_2 < K_1$, $K_2 < K_3$, ... gilt. Allgemein betrachtet heißt das:

$$K_0 < K_1 \quad \text{und} \quad K_{2j} < K_{2j+1}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Setzen wir jetzt Ungleichung (2.12) mit unseren Erkenntnissen über gerade und ungerade Indizes aus den Ungleichungen (2.9) und (2.10) zusammen, erhalten wir folgende Ungleichungskette:

$$K_{2s} \leq K_{2s+2r} < K_{2s+2r+1} \leq K_{2r+1} \quad \text{für alle } s, r \in \mathbb{N}_0.$$

Unsere Indizes r und s können unabhängig voneinander die Werte $0, 1, 2, \dots$ annehmen. Insbesondere ist bewiesen, dass irgendwelche aufeinanderfolgenden Kettenbrüche der Folge die gesuchte rationale Zahl einschließen. $\square$

Zum Abschluss wollen wir anhand eines Beispiels die Eigenschaft des Satzes verdeutlichen.

Beispiel 2.8

Dazu betrachten wir den Kettenbruch $[4; 1, 2, 1, 2, 1, 4]$. Mit Hilfe des Bildungsgesetzes 2.6 und Satz 2.7 bestimmen wir die Konvergenten des einfachen Kettenbruches:

$$K_0 = \frac{4}{1}, \quad K_1 = \frac{5}{1}, \quad K_2 = \frac{14}{3}, \quad K_3 = \frac{19}{4}, \quad K_4 = \frac{52}{11}, \quad K_5 = \frac{71}{15}, \quad K_6 = \frac{336}{71}.$$

Nun können wir nach unserem Satz die Ungleichungskette aufstellen

$$K_0 < K_2 < K_4 < K_6 < K_5 < K_3 < K_1,$$

für unser Beispiel heißt das also:

$$4 < \frac{14}{3} < \frac{52}{11} < \frac{336}{71} < \frac{71}{15} < \frac{19}{4} < 5.$$

Wir erhalten folgende Dezimaldarstellung:

$$4 < 4.6666... < 4.72727... < 4.73239... < 4.73333... < 4.75 < 5.$$

Das Beispiel bestätigt die Formel und Eigenschaften, die wir über Konvergenten kennengelernt haben.

Dieses Kapitel bietet uns die Grundlage im weiteren Verlauf auch unendliche Kettenbrüche. Alle kennengelernten Notationen und Eigenschaften sind nicht auf endliche Kettenbrüche beschränkt, denn in den Beweisen und Herleitungen spielt die Endlichkeit keine Rolle.

3 Unendliche Kettenbrüche

3.1 Allgemeine Einführung des unendlichen Kettenbruches

Im Kapitel 2 haben wir lediglich endliche Kettenbrüche betrachtet. Diese stellen, wenn sie einfach sind, eine rationale Zahl dar. Eine sehr wichtige Anwendung der Kettenbruchtheorie besteht allerdings darin, Näherungen für irrationale Zahlen zu finden. Daher führen wir jetzt den unendlichen Kettenbruch ein. Er hat die Form

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \ddots}},$$

wobei $a_0, a_1, a_2, \dots$ und $b_0, b_1, b_2, \dots$ sind reelle Zahlen. Die Grundlage für diesen Abschnitt ist die Literatur [Zip93] Abschnitt 2.1 und [Bur98] Kapitel 14.3.

In diesem Abschnitt werden wir nur auf unendliche regelmäßige Kettenbrüche eingehen.

Definition 3.1 *Ein unendlicher regelmäßiger Kettenbruch wird in folgender Form dargestellt:*

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}},$$

wobei die $a_0, a_1, a_2, \dots$ eine unendliche Folge von positiven ganzen Zahlen bilden. Sie sind auch wie beim endlichen Kettenbruch alle bis auf möglicherweise a_0 positiv.

Das Adjektiv „regelmäßig“ oder „einfach“ deutet nur darauf hin, dass sämtliche Teilnenner a_k ganze Zahlen sind. Da wir in diesem Abschnitt nur auf regelmäßige Kettenbrüche eingehen, werden wir das Wort „regelmäßig“ nicht explizit angeben und nur unendliche Kettenbrüche schreiben.

Die eingeführten Abkürzungen, die wir für den endlichen Kettenbruch kennengelernt haben, werden wir auch für den unendlichen weiter verwenden. Um einem Ausdruck wie $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ eine einwandfreie Bedeutung zuzuweisen, greifen wir auf die wohldefinierte Folge der endlichen Kettenbrüche

$$K_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n], \quad n \geq 0$$

zurück. Es muss uns klar sein, dass der unendliche Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ den Grenzwert der Folge der rationalen Zahlen K_n präsentiert – vorausgesetzt, dieser Grenzwert existiert.

3.1.1 Grenzwert des unendlichen Kettenbruches

Als nächstes widmen wir uns der Frage, ob ein Grenzwert für $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ immer existiert.

Satz 3.2 Für einen unendlichen Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ existiert immer ein Grenzwert.

Unter den Voraussetzungen, die wir über Kettenbrüche gemacht haben, existiert nicht nur immer ein Grenzwert, sondern er ist darüber hinaus auch immer eine irrationale Zahl, aber auf diese Eigenschaft werden wir später genauer eingehen. Die folgende Passage und Definition sind in [Ros84] und [Bur98], Abschnitt 14.3 zu finden.

Beweis: Wir beachten, dass alle Erkenntnisse und Formeln, die wir für endliche Kettenbrüche erlangt haben, nicht ihre Gültigkeit verlieren, da die Endlichkeit der Kettenbrüche bei der Herleitung nie eine Rolle spielt. Lassen wir die oberen Grenzen der Indizes weg, erhalten wir aus Satz 2.11, eine unendliche Gleichungskette für die Konvergenten des Kettenbruches $[a_0; a_1, a_2, \dots]$:

$$K_0 < K_2 < K_4 < \dots < K_{2n} < \dots < K_{2n+1} < \dots < K_5 < K_3 < K_1. \quad (3.1)$$

Wie wir wissen, bilden die Konvergenten mit geradem Index K_{2n} eine monoton wachsende Folge, die durch K_1 nach oben beschränkt ist und einen Grenzwert α besitzt, der größer als jede Konvergente K_{2n} ist. Auf der anderen Seite bilden die ungeradzahlig nummerierten Konvergenten K_{2n+1} eine monoton fallende Folge, die nach unten durch K_0 beschränkt ist, deren Grenzwert α' kleiner als jede Konvergente K_{2n+1} ist. Im weiteren muss jetzt noch gezeigt werden, dass die Grenzwerte α und α' übereinstimmen. Mit Formel (2.2) aus Satz 2.8 und den beiden Ungleichungen $K_{2n} < \alpha$ und $\alpha' < K_{2n+1}$ erhalten wir folgende Ungleichung:

$$\alpha' - \alpha < K_{2n+1} - K_{2n} = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{1}{Q_{2n}Q_{2n+1}}. \quad (3.2)$$

In unserer Ungleichung kann α' nicht kleiner als α sein, da sich die Folge der K_{2n} ihrem Grenzwert α beliebig nähert, genau wie sich die Folge der K_{2n+1} dem Grenzwert α' nähert, denn wäre es der Fall, müsste es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben, so dass $K_{2n+1} \leq K_{2n}$ für alle $n \geq n_0$ wäre. Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung, dass stets $K_{2n} < K_{2n+1}$ gilt. Aus (3.2) folgt mit $Q_{n-1} < Q_n$ aus Lemma 2.10 die Ungleichung:

$$0 \leq \alpha' - \alpha < \frac{1}{Q_{2n}Q_{2n+1}} < \frac{1}{Q_{2n}^2}.$$

Weil die Q_n aufgrund ihres Bildungsgesetzes 2.6 ihrem Betrage nach beliebig groß werden, wenn n über alle Grenzen wächst, können wir die rechte Seite der Ungleichung beliebig klein machen. Desweiteren können α und α' nicht verschieden sein, denn sonst würde $1/Q_{2n}^2$ – von einem bestimmten Index n_1 ab – kleiner als $|\alpha - \alpha'|$ ausfallen. Damit ist bewiesen, dass die Konvergenten mit geradem und ungeradem Index gegen denselben Grenzwert α streben. Gleichzeitig ist damit auch gezeigt, dass die Folge der Konvergenten K_n den Grenzwert α hat. $\square$

Im weiteren Verlauf des Kapitels wird die Notation $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ nicht nur für den unendlichen Kettenbruch selber verwendet, sondern auch für seinen Wert.

Mit dieser Vorarbeit können wir folgende Definition aufstellen.

Definition 3.3 Ist $a_0, a_1, a_2, \dots$ eine unendliche Folge ganzer Zahlen, in der alle Glieder bis auf möglicherweise a_0 positiv sind, dann verstehen wir unter dem Wert des unendlichen einfachen Kettenbruches $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Bis jetzt sind wir nur darauf eingegangen, dass für einen unendlichen Kettenbruch immer ein Grenzwert existiert. Im nächsten Teil werden wir auf die Eindeutigkeit eingehen.

3.1.2 Irrationale Zahlen

In Kapitel 2 haben wir erfahren, dass jeder endliche Kettenbruch einer rationalen Zahl entspricht. Wir wollen nun genauer den Wert eines unendlichen Kettenbruches betrachten.

Satz 3.4 Der Wert eines jeden unendlichen Kettenbruches ist eine irrationale Zahl.

Beweis: Wir bezeichnen den Wert des unendlichen Kettenbruches $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ mit α . Damit wird α zum Grenzwert unserer Folge der Konvergenten

$$K_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{P_n}{Q_n}.$$

Wie wir mit Hilfe der endlichen Kettenbrüche schon wissen, liegt der Grenzwert α für jedes n zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konvergenten K_n und K_{n+1} . Für gerade Indizes gilt dann $K_n < \alpha < K_{n+1}$ und für ungerade gilt dann $K_{n+1} < \alpha < K_n$. Daraus folgt die Ungleichung :

$$0 < |\alpha - K_n| < |K_{n+1} - K_n| = \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Wir wollen im weiteren Verlauf des Beweises einen Widerspruch erzeugen. Deshalb nehmen wir an, dass α eine rationale Zahl ist, also sei $\alpha = a/b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b > 0$. Dann gilt

$$0 < \left| \frac{a}{b} - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Als nächstes multiplizieren wir mit der positiven Zahl bQ_n und erhalten:

$$0 < |aQ_n - bP_n| < \frac{b}{Q_{n+1}}.$$

Wenn n jetzt beliebig groß wird, wächst Q_n unbeschränkt an. Diese Erkenntnis haben wir schon beim Aufstellen der Rekursionsformeln gewonnen. Wir können also jetzt n so groß wählen, dass $b < Q_{n+1}$ ist. Nun ergibt sich folgende Ungleichung:

$$0 < |aQ_n - bP_n| < \frac{b}{Q_{n+1}} < 1.$$

Da sowohl P_k und Q_k als auch a und b ganze Zahlen sind, muss auf Grund von $|aQ_n - bP_n| < 1$ eine ganze Zahl zwischen 0 und 1 existieren. Dies ist ein klarer Widerspruch und Satz 3.4 ist bewiesen. $\square$

Nun widmen wir uns der Frage der Eindeutigkeit: Können zwei verschiedene unendliche Kettenbrüche dieselbe irrationale Zahl darstellen? Wir stellen zuerst einen Satz auf:

Satz 3.5 *Gilt für zwei unendliche Kettenbrüche $[a_0; a_1, a_2, \dots] = [b_0; b_1, b_2, \dots]$, so ist $a_n = b_n$ für alle $n \geq 0$.*

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, sehen wir uns die Grenzwertregeln aus der Analysis an. Sie sind uns eine Hilfe beim Beweisen des Satzes. Wir können einen unendlichen Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} [a_0; a_1, a_2, \dots] &= \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_n]} \right) \quad (3.3) \\ &= a_0 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} [a_1; a_2, \dots, a_n]} = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, a_3, \dots]}. \end{aligned}$$

Wir kommen nun zum Beweis:

Beweis: Wir legen den Wert des unendlichen Kettenbruches, mit $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ fest, so dass $K_0 < \alpha < K_1$ gilt. Diese Ungleichung kann äquivalent durch die Gleichung $a_0 < \alpha < a_0 + 1/a_1$ ersetzt werden. Da uns aus Definition 2.1 bekannt ist, dass $a_1 \geq 1$ ist, folgt daraus die Ungleichung $a_0 < \alpha < a_0 + 1$. Wegen dieser Eigenschaft gilt, dass $\lfloor \alpha \rfloor = a_0$ ist. Dabei bezeichnen wir mit $\lfloor \alpha \rfloor$ den ganzzahligen Anteil der Zahl α . Wenn wir jetzt weiter annehmen, dass $[a_0; a_1, a_2, \dots] = \alpha = [b_0; b_1, b_2, \dots]$ ist, können wir die Gleichung nach den Grenzwertregeln (3.3) wie folgt umschreiben:

$$a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, a_3, \dots]} = \alpha = b_0 + \frac{1}{[b_1; b_2, b_3, \dots]}.$$

Da wir festgestellt haben, dass $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor = b_0$ ist, gilt also:

$$[a_1; a_2, a_3, \dots] = [b_1; b_2, b_3, \dots].$$

Nun können wir die eben angewandte Methode einfach mit Verschiebung der Indizes wiederholen. Danach erhalten wir, dass $a_1 = b_1$ ist und daraus folgt:

$$[a_2; a_3, a_4, \dots] = [b_2; b_3, b_4, \dots].$$

Diese Prozedur lässt sich durch eine Induktion schrankenlos fortsetzen, so dass unsere Behauptung $a_n = b_n$ für alle $n \geq 0$ gilt. $\square$

Zum Abschluss stellen wir noch folgendes Korollar auf:

Korollar 3.6 *Zwei verschiedene unendliche Kettenbrüche stellen zwei verschiedene irrationale Zahlen dar.*

Dieses Korollar fasst die Erkenntnisse aus Satz 3.4 und Satz 3.5 zusammen.

3.2 Algorithmus zur Berechnung von Kettenbrüchen

In diesem Abschnitt werden wir zuerst den Algorithmus für die Kettenbruchentwicklung erläutern. Danach werden wir genauer auf eine spezielle Anwendung des Algorithmus eingehen. Der Algorithmus stammt aus [Zip93] und [Per77].

Wir haben festgestellt, dass jeder unendliche Kettenbruch eine irrationale Zahl darstellt. Jetzt wollen wir eine irrationale Zahl α als einen unendlichen Kettenbruch der Form $[a_0; a_1, a_2, \dots]$, der gegen α konvergiert, darstellen. Dazu schauen wir uns den Algorithmus an:

Algorithmus 1

Gegeben ist eine irrationale Zahl α_0 und wir suchen den dazugehörigen unendlichen Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, \dots]$.

Wir nutzen die Funktion des größten Ganzen, um unsere Folge der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \dots$ zu definieren. Zuerst wird eine Folge für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ gebildet:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - \lfloor \alpha_0 \rfloor}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - \lfloor \alpha_1 \rfloor}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - \lfloor \alpha_2 \rfloor}, \dots$$

Danach setzen wir:

$$a_0 := \lfloor \alpha_0 \rfloor, \quad a_1 := \lfloor \alpha_1 \rfloor, \quad a_2 := \lfloor \alpha_2 \rfloor, \dots$$

Wir können jetzt die allgemeine Regel, nach der a_k induktiv entsteht, herleiten:

$$a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor, \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}, \quad \text{für } k \geq 0. \quad (3.4)$$

Es ist offensichtlich, dass α_{k+1} eine irrationale Zahl ist, wenn α_k eine solche ist. Da wir bei unserer Definition mit einer irrationalen Zahl α_0 starten, muss α_k für $k \geq 1$ auch irrational sein. Es gilt weiter:

$$0 < \alpha_k - a_k = \alpha_k - \lfloor \alpha_k \rfloor < 1.$$

Für unsere Formel heißt das

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} > 1, \quad (3.5)$$

so dass wir ganze Zahlen $a_{k+1} = \lfloor \alpha_{k+1} \rfloor \geq 1$ für alle $k \geq 0$ erhalten. Dieses Konstruktionsverfahren führt zu einer unendlichen Folge ganzer Zahlen $a_0, a_1, a_2, \dots$, die alle bis auf möglicherweise a_0 positiv sind. Nun müssen wir nur noch mit der uns bekannten induktiven Formel unseren Kettenbruch entwickeln. Es gilt nun nach unserer induktiven Regel (3.4):

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}, \quad \text{für } k \geq 0.$$

Durch schrittweise Substitution für jedes $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir:

$$\alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\alpha_2}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\alpha_3}}} = \dots = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha_{n+1}].$$

Die Ausgabe des Algorithmus ist also eine endliche Folge von a_k , die einen unendlichen Kettenbruch repräsentiert, der als Grenzwert eine irrationale Zahl hat.

Nun bleibt zu zeigen, dass α_0 der Wert des unendlichen Kettenbruchs $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ ist, dies werden wir im folgenden Beweis vorführen:

Beweis: Die ersten $n + 1$ Konvergenten $K_k = P_k/Q_k$ für $0 \leq k \leq n$, eines unendlichen Kettenbruchs $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ stimmen mit denen des endlichen Kettenbruchs $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$ überein. Wir bezeichnen die $(n + 2)$ -te Konvergente des Kettenbruchs mit K'_{n+1} . Wir können K'_{n+1} aus K_n erhalten, wie in der Gleichung 2.1 gesehen, indem wir a_n durch $a_n + 1/a_{n+1}$ ersetzen. Diese Eigenschaft ermöglicht uns weiter, dass wir K'_{n+1} aus K_{n+1} erhalten, indem wir a_{n+1} durch α_{n+1} ersetzen. Das ergibt für uns folgende Gleichungen:

$$\alpha_0 = K'_{n+1} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha_{n+1}] = \frac{P_n \alpha_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n \alpha_{n+1} + Q_{n-1}}.$$

Indem wir auf beiden Seiten die Konvergente K_n subtrahieren, erhalten wir mit Hilfe von Satz (2.8):

$$\alpha_0 - K_n = \frac{P_n \alpha_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n \alpha_{n+1} + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n)}{(\alpha_{n+1} Q_n + Q_{n-1}) Q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} Q_n + Q_{n-1}) Q_n}.$$

Nach der Ungleichung $0 < \alpha_k - a_k = \alpha_k - \lfloor \alpha_k \rfloor < 1$ aus unserem Algorithmus, gilt dann $\alpha_{n+1} > a_{n+1}$ und es folgt mit Hilfe des Bildungsgesetzes 2.6:

$$|\alpha_0 - K_n| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} Q_n + Q_{n-1}) Q_n} < \frac{1}{(a_{n+1} Q_n + Q_{n-1}) Q_n} = \frac{1}{Q_{n+1} Q_n}.$$

Das Ungleichheitszeichen entsteht dadurch, dass alle Größen positiv sind und Q_n nach Definition 2.6 unbeschränkt wächst. Damit nähern sich die Konvergenten der irrationalen Zahl α_0 an und es gilt:

$$\alpha_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

□

Unsere Erkenntnisse, die wir über den Algorithmus gewonnen haben, fassen wir jetzt in einem Satz zusammen:

Satz 3.7 *Jede irrationale Zahl besitzt eine eindeutige Darstellung durch einen Kettenbruch. Durch Algorithmus 1 können a_0 und die Teilnenner a_k für $k = 1, 2, \dots$ gewonnen werden.*

Der Algorithmus ist in der Funktion **IrrationalInKettenbruch** programmiert. Wir können rationale und irrationale Zahlen eingeben und unsere Funktion liefert uns nach dem Kettenbruch-Algorithmus eine Kettenbruchentwicklung.

Zur Verdeutlichung werden wir uns nun ein Beispiel für Kettenbruch-Algorithmus ansehen.

3.2.1 Kettenbruchentwicklung der Zahl π

Eine gutes Beispiel einer Kettenbruchentwicklung bietet die Herleitung der Konvergenten der Kreiszahl π .

Beispiel 3.1

Wir haben die Zahl

$$\pi \approx 3.141592653\dots$$

gegeben und wollen eine Annäherung durch einen Kettenbruch vornehmen.

Indem wir den Kettenbruch-Algorithmus anwenden, erhalten wir die folgenden Teilnenner der Kettenbruchentwicklung von π :

$$\begin{aligned}\alpha &= \pi \approx 3.141592653589793\dots && \Rightarrow a_0 = 3 \\ \alpha_1 &= (\pi - 3)^{-1} \approx 7.062513305931052\dots && \Rightarrow a_1 = 7 \\ \alpha_2 &= (\alpha_1 - 7)^{-1} \approx 15.996594406684104\dots && \Rightarrow a_2 = 15 \\ \alpha_3 &= (\alpha_2 - 15)^{-1} \approx 1.0034172310150003\dots && \Rightarrow a_3 = 1 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Wenn wir dieses Verfahren weiter fortsetzen, erhalten wir:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 84, \dots].$$

Die ersten fünf Konvergenten sind:

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113} \quad \text{und} \quad \frac{103993}{33102}.$$

Die numerischen Werte, die wir aus diesen Brüchen für π erhalten, sind:

$$3.0, 3.142857, 3.141509, 3.141593 \quad \text{und} \quad 3.1415926.$$

Wir sehen, dass die Näherungen immer im Wechsel größer bzw. kleiner als π sind. Diese Eigenschaft haben wir in Satz 2.11 kennengelernt.

Diese Ergebnisse erhalten wir auch mit unseren Funktionen in *Mathematica*:

```
In[11]:= IrrationalInKettenbruch[ $\pi$ ]
```

```
Out[11]= {3, 7, 15, 1, 292}
```

Von der Funktion **IrrationalInKettenbruch** werden in diesem Fall nur die ersten fünf Teilnenner ausgegeben, denn die Genauigkeit des Algorithmus ist auf 10^{-9} beschränkt. Der Kettenbruch mit fünf Teilennern weist bereits diese Genauigkeit auf. In Kapitel 4 werden wir genauer auf Abschätzungen und Genauigkeit von Kettenbrüchen eingehen. In diesem Zusammenhang wird auch eine genauere Abschätzung mit der in *Mathematica* implementierten Funktion **IrrationalInKettenbruchGenau** vorgenommen.

Wir wenden als nächstes die Funktion **Konvergenten** an:

```
In[12]:= Konvergenten[{3, 7, 15, 1, 292}]
```

$$\text{Out}[12] = \left\{ 3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102} \right\}$$

$$\text{In}[13] := \mathbf{N}[\mathbf{Konvergenten}[\{3, 7, 15, 1, 292\}]]$$

$$\text{Out}[13] = \{3., 3.14286, 3.14151, 3.14159, 3.14159\}$$

Die programmierte Funktion liefert uns also die gleichen Ergebnisse wie unsere Rechnung.

Eine vollständige Kettenbruchdarstellung einer irrationalen Zahl ist nur in den Fällen möglich, wenn der Kettenbruch eine spezielle Form hat und eine periodische Entwicklung aufweist. In den meisten Fällen lässt sich bei einer Kettenbruchentwicklung keine bestimmte Stelle ausmachen, von der an sie periodisch ist.

Aber es lässt sich folgende Aussage beweisen: Wenn α eine irrationale Wurzel einer quadratischen Gleichung mit ganzen Koeffizienten ist, also α die Form $r + s\sqrt{D}$ hat, wobei $r, s \in \mathbb{R}$ und D eine natürliche Zahl ist, die keine Quadratzahl ist, dann ist die Kettenbruchentwicklung ab einer bestimmten Stelle periodisch (siehe dazu den Abschnitt 5.1.1).

3.2.2 Kettenbruchentwicklung der Zahl e

In Abschnitt 3.2 haben wir gesehen, dass sich jede irrationale Zahl eindeutig in einen Kettenbruch entwickeln lässt. Unter den irrationalen Zahlen gibt es aber nur wenige Kettenbruchdarstellungen, die in irgendeiner Art regelmäßig sind. Auf eine Ausnahme werden wir in diesem Abschnitt genauer eingehen, die positive Konstante e .

Sie hat eine Regelmäßigkeit in ihrer Kettenbruchentwicklung. Schon Euler beschäftigte sich mit dem Kettenbruch der Zahl e . Die Basis der natürlichen Logarithmen

$$e = 2.718281828\dots$$

stellt eine interessante Kettenbruchentwicklung dar. Da es eine der wenigen Kettenbruchentwicklungen ist, die eine Regelmäßigkeit aufweist. Die ersten fünf Konvergenten sind:

$$\frac{3}{1}, \frac{19}{7}, \frac{193}{71}, \frac{2721}{1001} \text{ und } \frac{49171}{18089}.$$

Aufgeschrieben bis zur ersten vom richtigen Wert abweichenden Stelle lauten die Näherungswerte:

$$3.0, 2.714, 2.7183, 2.7182817, 2.7182818287.$$

Wie wir schon bei π gesehen haben, lässt diese Kettenbruchentwicklung auch eine sehr gute Konvergenz erkennen. Die Kettenbruchdarstellung der Zahl e ist:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots].$$

Wir sehen, dass die Kettenbruchentwicklung die Regelmäßigkeit aufweist, dass die geraden Zahlen – durch zwei Einsen getrennt – alle nacheinander auftreten. Euler fand

seiner Zeit noch regelmäßige Kettenbruchentwicklungen in Verbindung mit der Konstanten e :

$$\frac{e-1}{e+1} = [0; 2, 6, 10, 14, 18, \dots] \quad \text{und} \quad \frac{e^2-1}{e^2+1} = [0; 1, 3, 5, 7, 9, \dots],$$

in diesen Beispielen bilden die Teilnenner eine arithmetischen Folge.

Die Zahl e hat zwar keine periodische Kettenbruchentwicklung –ist daher auch nicht endlich darstellbar– aber sie ist eine der wenigen irrationalen Zahlen, in denen sich eine Regelmäßigkeiten für die Teilnenner erkennen lässt.

4 Approximationen mit Hilfe von Kettenbrüchen

Wir werden uns jetzt genauer mit dem Kettenbruch als Näherung an eine irrationale Zahl beschäftigen. Im weiteren Verlauf werden Abschätzungsformeln vorgestellt, die beschreiben, wie dicht eine Konvergente einer Kettenbruchentwicklung an einer irrationalen Zahl liegt. Die Grundlage dieses Kapitels ist Literatur aus [Olds63] und [Bur98] Abschnitt 14.3.

4.1 Approximationen von irrationalen Zahlen

Im Beweis zu Satz 3.2 Abschnitt 3.1.1 haben wir eine Abschätzung genutzt, die wir als Korollar festhalten wollen.

Korollar 4.1 Ist P_n/Q_n die n -te Konvergente der irrationalen Zahl α so gilt die Ungleichung

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Beweis: Wir sind mit ähnlichen Abschätzungen schon in mehreren Beweisen konfrontiert worden. Mit Hilfe der Rekursionsformeln für den Zähler und Nenner unserer Konvergente und Satz 2.8 kommen wir schnell ans Ziel:

$$0 < \left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \left| \frac{P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}} \right| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{Q_nQ_{n+1}} \right| = \frac{1}{Q_nQ_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Für α haben wir die nächst höhere Konvergente P_n/Q_n eingesetzt. Wir wissen, dass der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Konvergenten immer größer ist als der Abstand zwischen dem Grenzwert des Kettenbruches und einer der beiden Konvergenten. Im dritten Schritt wird Formel (2.2) aus Satz 2.8 angewendet. Nach der Definition der Rekursionsformel 2.6 für die Konvergenten sind die Q_k immer positiv und daher kann der Betrag ohne Bedenken weg gelassen werden. Damit ist der Beweis für die Ungleichung abgeschlossen. $\square$

Beispiel 4.1

Wir greifen jetzt Beispiel 3.1 wieder auf, die Kettenbruchentwicklung für die Kreiszahl π . Nun wollen wir kurz, anhand dieses Beispiels, eine numerische Überprüfung des Korollars vornehmen:

$$\left| \pi - \frac{22}{7} \right| < \frac{1}{7 \cdot 15} < \frac{1}{7^2}.$$

Der Bruch $22/7$ ist die zweite Konvergente der Kettenbruchentwicklung für die Zahl π . Die Abschätzungsgenauigkeit kann so mit Hilfe von Korollar 4.1 abgeschätzt werden.

In Beispiel 3.1 haben wir π mit Hilfe des in *Mathematica* implementierten Befehls **IrrationalInKettenbruch** berechnet. Es sind zwei Funktion in *Mathematica* programmiert, **IrrationalInKettenbruch** und **IrrationalInKettenbruchGenau**, beide bestimmen einen Kettenbruch mit Hilfe des Kettenbruch-Algorithmus. Die Genauigkeit der beiden Kettenbruchentwicklung ist auf 10^{-9} festgelegt. Die Genauigkeit

der Abschätzung kann in beiden Funktionen durch die Eingabe eines optionalen Parameters verändert werden. Der Unterschied in den beiden Funktionen ist die Abschätzung:

1. **IrrationalInKettenbruchGenau[x, r]:**

In dieser Funktion wird die Abschätzung mit Hilfe von Korollar 4.1

$$\frac{1}{Q_k^2} < r,$$

vorgenommen, wobei $r = 10^{-9}$ oder die optionale Eingabe des Users ist.

2. **IrrationalInKettenbruch[x, r] :**

In dieser Funktion wird die Abschätzung durch

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < r$$

vorgenommen, wobei $r = 10^{-9}$ oder die optionale Eingabe des Users ist. Als Abschätzung wird Differenz zwischen der irrationalen Zahl α und der zuletzt errechneten Konvergente genommen.

Wir werden das Beispiel 3.1 unter diesen Voraussetzungen betrachten:

Beispiel 4.2

Wir bestimmen die irrationale Zahl π mit Hilfe der in *Mathematica* programmierten Funktionen. Wir bestimmen π sicherheitshalber bis auf die ersten 200 Stellen. Dann lassen wir mit Hilfe der Funktionen einen Kettenbruch mit der Genauigkeit von 10^{-50} approximieren:

```
In[14]:= IrrationalInKettenbruch[N[ $\pi$ , 200], 10^-50]
```

```
Out[14]= {3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84,
          2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1}
```

```
In[15]:= IrrationalInKettenbruchGenau[N[ $\pi$ , 200], 10^-50]
```

```
Out[15]= {3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84,
          2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7}
```

Die Funktion **IrrationalInKettenbruchGenau** ist genauer, da sie Korollar 4.1 verwendet:

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Dies hat zur Folge, dass bei großen k , möglicherweise ein a_k mehr berechnet wird.

4.1.1 Kettenbruchentwicklung als beste Näherung einer irrationalen Zahl

Wenn eine irrationale Zahl vorliegt, ist die Frage interessant, wie dicht die Kettenbruchentwicklung an der gesuchten irrationalen Zahl liegt oder besser gesagt, mit welchem Genauigkeitsgrad wir uns diesem α mit einer rationalen Zahl genähert haben.

Wir werden im weiteren Verlauf dieses Abschnittes sehen, dass die Kettenbruchentwicklung die beste Approximation an eine irrationale Zahl liefert.

Eine Möglichkeit ist, dass wir alle rationalen Zahlen mit einem festen ganzzahligen Nenner $b > 0$ betrachten. Zu einem solchen $b \in \mathbb{N}$ existiert ein $c \in \mathbb{N}$ mit:

$$c < b\alpha < c + 1 \Leftrightarrow \frac{c}{b} < \alpha < \frac{c + 1}{b}. \quad (4.1)$$

Die irrationale Zahl α kann nie genau in der Mitte des Intervalls $[c/b, (c + 1)/b]$ der Länge $1/b$ liegen. Deshalb gilt entweder

$$\frac{c}{b} < \alpha < \frac{c}{b} + \frac{1}{2b} \quad \text{oder} \quad (4.2)$$

$$\frac{c + 1}{b} - \frac{1}{2b} < \alpha < \frac{c + 1}{b}. \quad (4.3)$$

Diese beiden Näherungen entstehen, indem wir die Mitte des Intervalls der Gleichung (4.1) mit $c/b + 1/(2b)$ in Betracht ziehen. Dann erhalten wir den linken Teil von der Mitte mit Ungleichung (4.2) und den rechten Teil mit (4.3).

Nun wählen wir für (4.2) $a = c$ oder für (4.3) $a = c + 1$, damit die Ungleichung

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b}$$

erfüllt ist. Korollar 4.1 ist noch um einiges strenger als die gerade gezeigte Ungleichung. Denn das Korollar besagt, dass es zu einer gegebenen irrationalen Zahl α unendlich viele rationale Zahlen a/b gibt, die der Ungleichung

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^2}$$

genügen. Da dieses Korollar unserer Kettenbruchentwicklung unterliegt, heißt das nichts anderes, als dass jede der Konvergenten P_n/Q_n der Kettenbruchentwicklung von α die Rolle der rationalen Zahl a/b übernehmen kann. Da Nenner und Zähler der Konvergenten teilerfremd sind, können wir sogar die Eigenschaft beweisen, dass die Konvergenten P_n/Q_n die beste Approximation in dem Sinne sind, dass sie dichter als jede andere rationale Zahl a/b mit kleinerem oder höchstens gleichem Nenner an α liegen.

Um dieses zu zeigen führen wir erst ein Lemma ein, welches nachher den Kern unseres Satzes bilden wird:

Lemma 4.2 Sei P_n/Q_n die n -te Konvergente des Kettenbruches, der die irrationale Zahl α darstellt. Sind a und b ganze Zahlen mit $1 \leq b < Q_{n+1}$, so gilt:

$$|Q_n \alpha - P_n| \leq |b\alpha - a|.$$

Beweis: Wir betrachten zunächst das lineare Gleichungssystem:

$$P_n \beta + P_{n+1} \gamma = a, \quad (4.4)$$

$$Q_n \beta + Q_{n+1} \gamma = b. \quad (4.5)$$

Da wir aus Satz 2.8 wissen, dass die Determinante dieses Gleichungssystems $P_n Q_{n+1} - P_{n+1} Q_n = (-1)^{n+1}$ ist, erhalten wir für β und γ zwei eindeutige ganzzahlige Lösungen:

$$\begin{aligned}\beta &= (-1)^{n+1}(aQ_{n+1} - bP_{n+1}), \\ \gamma &= (-1)^{n+1}(bP_n - aQ_n).\end{aligned}$$

Diese Lösungen erhalten wir, indem wir die Gleichungen (4.4) und (4.5) nach β und γ auflösen und dann $(-1)^{n+1}$ für $P_n Q_{n+1} - P_{n+1} Q_n$ einsetzen. Nun muss $\beta \neq 0$ sein, denn sonst wäre $aQ_{n+1} = bP_{n+1}$. Da der $\text{ggT}(P_{n+1}, Q_{n+1}) = 1$ ist, wäre Q_{n+1} ein Teiler von b , das heißt gleichzeitig, dass $b \geq Q_{n+1}$ ist. Dies ist ein klarer Widerspruch zu unserer Voraussetzung.

Im Folgenden betrachten wir nun zwei Fälle.

1. Ist $\gamma = 0$, so ist unsere Ungleichung sicherlich erfüllbar, denn daraus folgt $a = P_n \beta$ und $b = Q_n \beta$ und da β ganzzahlig gewählt worden ist und $|\beta| \geq 1$ gilt, sehen wir leicht, dass

$$|b\alpha - a| = |\beta||Q_n \alpha - P_n| \geq |Q_n \alpha - P_n| \quad (4.6)$$

erfüllt ist.

2. Daher nehmen wir für den Rest des Beweises an, dass $\gamma \neq 0$ ist. Ist dies der Fall müssen β und γ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Ist nämlich $\gamma < 0$, folgt aus der (4.5) des Gleichungssystems:

$$Q_n \beta = b - Q_{n+1} \gamma.$$

Die Voraussetzung sagt aber, dass $b \geq 1$ ist und das führt uns zu der Ungleichung $Q_n \beta > 0$. Da Q_k nach der Definition immer positiv ist, muss in dem Fall auch $\beta > 0$ sein.

Ist auf der anderen Seite $\gamma > 0$, hat das zur Folge, dass mit unserer Voraussetzung $b < Q_{n+1}$ und der Ganzzahligkeit von γ die Ungleichung $b < \gamma Q_{n+1}$ gilt und daraus folgt, dass

$$Q_n \beta = b - Q_{n+1} \gamma < 0$$

gilt. Das heißt $\beta < 0$.

Nun betrachten wir die Situation aus einer anderen Sichtweise. Wir wissen, dass unser gesuchtes α immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konvergenten P_n/Q_n und P_{n+1}/Q_{n+1} liegt, deshalb gilt eine der beiden folgenden Ungleichungen

$$0 < Q_n \alpha - P_n \quad \text{und} \quad Q_{n+1} \alpha - P_{n+1} < 0 \quad \text{für } n \text{ gerade,} \quad (4.7)$$

$$0 > Q_n \alpha - P_n \quad \text{und} \quad Q_{n+1} \alpha - P_{n+1} > 0 \quad \text{für } n \text{ ungerade.} \quad (4.8)$$

Unter diesen Umständen müssen

$$\beta(Q_n \alpha - P_n) \quad \text{und} \quad \gamma(Q_{n+1} \alpha - P_{n+1}) \quad (4.9)$$

das gleiche Vorzeichen haben. Dann aber ist der absolute Wert der Summe der beiden Zahlen aus (4.9) gleich der Summe der absoluten Werte der beiden Summanden. Diese Tatsache können wir ausnutzen, um unseren Satz endgültig zu beweisen:

$$\begin{aligned}
|b\alpha - a| &= |(Q_n\beta + Q_{n+1}\gamma)\alpha - (P_n\beta + P_{n+1}\gamma)| \\
&= |\beta(Q_n\alpha - P_n) + \gamma(Q_{n+1}\alpha - P_{n+1})| \\
&= |\beta|(Q_n\alpha - P_n)| + |\gamma|(Q_{n+1}\alpha - P_{n+1})| \\
&> |\beta|Q_n\alpha - P_n| \\
&\geq |Q_n\alpha - P_n|.
\end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung (4.6) gezeigt und das Lemma bewiesen. $\square$

Nun kommen wir auf unsere Behauptung zurück, die Konvergenten P_n/Q_n sind die besten Näherungen an eine irrationale Zahl α . Die Abweichung zwischen einer irrationalen Zahl und einer Konvergenten ist betragsmäßig kleiner als die Abweichung zwischen einer irrationalen Zahl α und jeder rationalen Näherung mit demselben oder einem kleineren Nenner.

Um endgültig unsere Behauptung zu zeigen, dass die Konvergente P_n/Q_n die beste Approximation an eine irrationale Zahl ist, müssen wir noch folgenden Satz beweisen:

Satz 4.3 Sei $1 \leq b \leq Q_n$, so gilt für die rationale Zahl a/b die Ungleichung:

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \left| \alpha - \frac{a}{b} \right|.$$

Beweis: Dieser Beweis ist schnell erbracht, indem wir einen Widerspruch erzeugen. Nehmen wir also an, es gelte

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| > \left| \alpha - \frac{a}{b} \right|.$$

Dann gelangen wir zur folgenden Ungleichungskette

$$|Q_n\alpha - P_n| = Q_n \left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| > Q_n \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \geq b \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| = |b\alpha - a|$$

und dies ist ein klarer Widerspruch zu Lemma 4.2 und damit wäre dieser letzte Beweis auch erbracht. $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, wie dicht eine Kettenbruchentwicklung bereits mit wenigen Schritten an der gesuchten irrationalen Zahl liegt.

Beispiel 4.3

Die Mathematik hat schon relativ früh ein sehr großes Augenmerk auf die Berechnung der Zahl π gelegt. Die erste Approximation erschien im Werk der Kreismessung von dem Mathematiker *Archimedes*⁴. Seine Methode, den Wert π zu berechnen, bestand darin, einen Kreis von innen und von außen mit regelmäßigen Polygonen anzunähern

⁴Archimedes (geboren 287 v. Chr. und starb 212 v. Chr.) war ein Mathematiker.

und dann deren Umfänge zu berechnen. Dadurch erhielt er dann eine obere und untere Schranke des Kreisumfangs. Mit dieser Methode erhielt er mit Hilfe eines 96-seitigen Polygons die Abschätzung

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Wie wir aus Beispiel 3.1 wissen, ist der Wert $22/7$ die Konvergente K_1 aus der Kettenbruchentwicklung für π , der sogenannte Archimedes-Wert. Er ist eine der am häufigsten verwendeten Approximationen von π . Es gibt keinen Bruch mit teilerfremden Zahlen und kleinerem Nenner, der eine bessere Approximation bietet. Der Archimedes-Wert $223/71$ ist keine Konvergente und daher wissen wir nach Satz 4.3, dass er keine bessere Approximation für π ist. Die nächst höhere Konvergente ist $333/106$. Diese bietet eine noch viel bessere Approximation und wurde im 16-ten Jahrhundert lange als Wert für π verwendet. Wir wissen aus Satz 4.3 auch, dass es keine bessere Approximation durch eine andere rationale Zahl gibt, die einen kleineren oder gleichen Nenner hat. Die vorgestellten Approximationen sehen nun wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \left| \pi - \frac{22}{7} \right| &\approx 0.0012645, \\ \left| \pi - \frac{223}{71} \right| &\approx 0.0007476 \quad \text{und} \\ \left| \pi - \frac{333}{106} \right| &\approx 0.0000832, \end{aligned}$$

wobei $223/71$ keine Konvergente ist und $333/106$ die Konvergente $K_2 = P_2/Q_2$ unserer Kettenbruchentwicklung ist. Die Konvergente P_3/Q_3 bietet schon eine enorme Genauigkeit, das kann durch Korollar 4.1 gezeigt werden, da bei der Abschätzung zwischen π und unserer Konvergente der Nenner $Q_4 = 33102$ genutzt wird:

$$\left| \pi - \frac{355}{113} \right| < \frac{1}{113 \cdot 33102} \left(< \frac{3}{10^7} \right) < \frac{1}{113^2} \approx 0.0000783147.$$

Nun werden wir noch einen Satz betrachten, der unsere Untersuchungen weiter festigt. Dieser besagt, dass eine bezüglich ihres Nenners dicht an α liegende rationale Zahl notwendigerweise eine Konvergente der Kettenbruchentwicklung von α ist.

Satz 4.4 Sei α eine irrationale Zahl. Falls eine rationale Zahl a/b mit $b \geq 1$ die Ungleichung

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$$

erfüllt, so ist a/b eine der Konvergenten P_n/Q_n aus der Kettenbruchdarstellung von α .

Beweis: Wir beweisen den Satz, indem wir einen Widerspruch erzeugen. Dazu nehmen wir an, dass a/b keine Konvergente von α ist. Es gibt ein eindeutig bestimmtes n mit $Q_n \leq b < Q_{n+1}$, weil diese Nenner eine echt wachsende Folge bilden. Für dieses n gilt nach Lemma 4.2 nun:

$$|Q_n \alpha - P_n| < |b\alpha - a| = b \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b}.$$

Diese Ungleichung können wir durch eine Multiplikation mit $1/Q_n$ in folgende Form bringen:

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{2Q_n b}.$$

Da wir angenommen haben, dass $a/b \neq P_n/Q_n$ ist, erhalten wir für $bP_n - aQ_n$ eine Differenz $1 \leq |bP_n - aQ_n|$, die ungleich Null ist. Weiter können wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung und $bQ_n > 0$ auf

$$\frac{1}{bQ_n} \leq \frac{|bP_n - aQ_n|}{bQ_n} = \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{P_n}{Q_n} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2bQ_n} + \frac{1}{2b^2}$$

schließen. Nun formen wir unsere erhaltene Ungleichung um:

$$\begin{aligned} \frac{1}{bQ_n} &< \frac{1}{2bQ_n} + \frac{1}{2b^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{bQ_n} &< \frac{b + Q_n}{2b^2Q_n} \\ \Leftrightarrow 2b &< b + Q_n \\ \Leftrightarrow b &< Q_n. \end{aligned}$$

Die Ungleichung $b < Q_n$ ist ein klarer Widerspruch zur vorausgesetzten Eigenschaft $Q_n \leq b < Q_{n+1}$, damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Am Ende dieses Kapitels können wir festhalten, dass eine Approximation durch einen Kettenbruch eine Konvergente P_k/Q_k hervorbringt, die bezüglich des Nenners Q_k die beste rationale Näherung an eine irrationale Zahl ist.

5 Regelmäßige periodische Kettenbrüche

5.1 Rein- und gemischtperiodische Kettenbrüche

In den vorhergehenden Kapiteln sind wir schon auf unendliche regelmäßige Kettenbrüche, die eine irrationale Zahl darstellen, eingegangen. In diesem Abschnitt wollen wir nun auf eine spezielle Form eingehen und zwar auf unendliche regelmäßige Kettenbrüche, die ein bemerkenswertes Bildungsgesetz befolgen. Das besondere an diesen Kettenbrüchen ist, dass gleiche Teilnenner wiederholt auftreten.

Alle Kettenbrüche im folgenden Kapitel sind regelmäßig, daher werden wir nicht immer explizit „regelmäßig“ schreiben. Die zugrundeliegende Literatur ist [Per77] Kapitel 3 §19 bis 26.

Betrachten wir zum Einstieg eine Form eines Kettenbruches, welche sehr häufig auftritt und zwar, dass sich die letzten Teilnenner unendlich oft wiederholen. Wir schauen uns einen unendlichen Kettenbruch der Form $[3; 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, \dots]$ an. In diesem sehen wir, dass sich die letzten 4 Teilnenner unendlich oft wiederholen. Enthält ein unendlicher Kettenbruch einen Block von Teilennern $a_1, a_2, \dots, a_n$, der sich unendlich oft wiederholt, so heißt der Bruch periodischer Kettenbruch.

Definition 5.1 *Ein periodischer Kettenbruch der Form*

$$[a_0; a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n, b_1, \dots, b_n, \dots]$$

wird kompakt in folgender Gestalt dargestellt

$$[a_0; a_1, \dots, a_m, \overline{b_1, \dots, b_n}].$$

Das Überstreichen der Teilnenner $b_1, b_2, \dots, b_n$ besagt, dass sich dieser Block ganzer Zahlen unendlich oft wiederholt. Der kleinste Block dieser b_k , der sich unendlich oft wiederholt, wird Periode der Kettenbruchentwicklung genannt und n ist die Periodenlänge.

Ein periodischer Kettenbruch dieser Gestalt wird als gemischtperiodisch bezeichnet. Die Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_k$ bilden die sogenannte Vorperiode.

Für den Kettenbruch $[3; 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, \dots]$ heißt das: Er hat die Periode $1, 2, 1, 6$ mit der Periodenlänge $n = 4$ und wird in der Form $[3; \overline{1, 2, 1, 6}]$ geschrieben.

5.1.1 Quadratische Irrationalität

Bevor wir zu den periodischen Kettenbrüchen kommen, führen wir die quadratische Irrationalität ein.

Definition 5.2 *Als quadratische Irrationalität bezeichnen wir jede reelle, nicht rationale Lösung einer quadratischen Gleichung der Form:*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ und } a \neq 0.$$

Uns ist bekannt, dass jede Zahl $\sqrt{D}$ irrational ist, wenn $D \in \mathbb{N}$ und D keine Quadratzahl ist. Die allgemeine Lösung der Gleichung $x^2 - D = 0$ ist $\sqrt{D}$. Wir werden im weiteren Verlauf des Kapitels den Zusammenhang zwischen periodischen Kettenbrüchen und quadratischen Irrationalitäten kennenlernen.

5.1.2 Reinperiodische Kettenbrüche

Wie bei periodischen Zahlen gibt es auch bei periodischen Kettenbrüchen den Unterschied zwischen reinperiodisch und gemischtperiodisch. Wobei die gemischtperiodischen Kettenbrüche eine allgemeinere Form bilden. Zunächst wollen wir aber nur auf die reinperiodischen Kettenbrüche eingehen.

Definition 5.3 Ein unendlicher regelmäßiger Kettenbruch der Form

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, \dots],$$

bei dem sich die Teilnenner $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ in unendlicher Folge wiederholen, heißt periodisch. Ein Kettenbruch mit der Charakteristik

$$a_{i+k} = a_i \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0$$

ist reinperiodisch, da die ganzen Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ die Periode bilden. Die Notation dieses Kettenbruches ist

$$[\overline{a_0; a_1, \dots, a_{k-1}}].$$

Ein reinperiodischer Kettenbruch hat die Eigenschaft, dass auch das Anfangsglied a_0 immer positiv ist, da es an einer späteren Stelle ($a_0 = a_k$) wieder vorkommt und Definition 2.1 besagt, dass alle Teilnenner positiv sein müssen. Dies hat auch zur Folge, dass automatisch alle unsere Konvergenten P_k/Q_k positiv sind.

Wir beginnen mit einem Spezialfall der reinperiodischen Kettenbrüche, in dem alle Teilnenner gleich sind und der Kettenbruch die Gestalt

$$\alpha_0 = [a; a, a, \dots]$$

hat. Da alle Teilnenner gleich sind, folgt

$$\alpha_1 = [a; a, a, \dots] = \alpha_0.$$

Hierdurch wird α_1 definiert und mit α_0 in Verbindung gebracht. Danach folgt:

$$\alpha_0 = a + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Wir erhalten für α_0 die Wurzelgleichung in der Form:

$$x = a + \frac{1}{x} \quad \text{oder} \quad x^2 - ax - 1 = 0.$$

Da nach unseren Voraussetzungen α_0 positiv ist, kommt nur die positive Wurzel in Betracht und wir erhalten als Lösung für unseren Kettenbruch:

$$\alpha_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}. \quad (5.1)$$

Diesen ersten Spezialfall werden wir nun an einem Beispiel betrachten:

Beispiel 5.1

Gegeben sei der Kettenbruch $\alpha_0 = [3; 3, 3, \dots]$, den wir nach unserer Definition 5.3 auch wie folgt schreiben können: $[\bar{3}]$. Wir suchen für unseren Kettenbruch einen Ausdruck für α_0 . Um diese zu erhalten, müssen wir $a = 3$ nur in unsere Gleichung (5.1) einsetzen und erhalten:

$$\alpha_0 = [\bar{3}] = \frac{3 + \sqrt{3^2 + 4}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Daraus folgt für unser Beispiel, dass die Lösung für unseren periodischen Kettenbruch mit einem Element gleich $(3 + \sqrt{13})/2 \approx 3.303$ ist.

Nachdem wir diesen Spezialfall des reinperiodischen Kettenbruches betrachtet haben, werden wir uns als nächstes die Berechnung des allgemeinen reinperiodischen Kettenbruches ansehen: Wir wissen, dass für einen periodischen Kettenbruch allgemein gilt

$$\alpha_0 = \alpha_k = \alpha_{2k} = \alpha_{3k} = \dots,$$

wobei in dem Fall k die Periodenlänge ist. Aus dieser Gleichheit ergibt sich für α_0 folgende Gleichung:

$$\alpha_0 = \frac{P_{k-1}\alpha_k + P_{k-2}}{Q_{k-1}\alpha_k + Q_{k-2}}. \quad (5.2)$$

Diese Gleichung erscheint auf den ersten Blick nicht sofort verständlich, aber sie geht direkt aus dem Bildungsgesetz 2.6 hervor. Denn für einen endlichen Kettenbruch gilt:

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1}a_k + P_{k-2}}{Q_{k-1}a_k + Q_{k-2}} = [a_0; a_1, \dots, a_k].$$

Für den periodischen Kettenbruch mit der Periodenlänge k gilt:

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{2k}].$$

Da $\alpha_0 = \alpha_k$ können wir den Kettenbruch bestimmen, indem wir die k -te Konvergente bilden und für diese gilt (5.2).

Weiter erhalten wir aus (5.2) die quadratische Gleichung

$$x = \frac{P_{k-1}x + P_{k-2}}{Q_{k-1}x + Q_{k-2}} \quad \text{oder} \quad Q_{k-1}x^2 + (Q_{k-2} - P_{k-1})x - P_{k-2} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat eine positive und eine negative Wurzel. Aufgrund von (3.4) gilt $\alpha_0 > a_0$ und damit ist α_0 positiv. Aus diesem Grund wird nur die positive Wurzel bei der Auflösung in Betracht bezogen:

$$\alpha_0 = \frac{P_{k-1} - Q_{k-2} + \sqrt{(P_{k-1} - Q_{k-2})^2 + 4Q_{k-1}P_{k-2}}}{2Q_{k-1}}. \quad (5.3)$$

Da α_0 einen unendlichen irrationalen Kettenbruch darstellt, kann der Radikand unmöglich ein Quadrat sein. Dieses können wir nachweisen, indem wir ihn in folgender Form auffassen:

$$\begin{aligned} & (P_{k-1} - Q_{k-2})^2 + 4Q_{k-1}P_{k-2} \\ &= (P_{k-1} + Q_{k-2})^2 + 4(Q_{k-1}P_{k-2} - Q_{k-2}P_{k-1}) \\ &= (P_{k-1} + Q_{k-2})^2 + 4(-1)^{k-1}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann nur dann ein Quadrat sein, wenn er Null ist. Das gilt aber nur wenn k gerade ist. Dies hätte zur Folge, dass $P_{k-1} + Q_{k-2} = 2$ gilt. Für gerade k gilt aber immer:

$$P_{k-1} + Q_{k-2} \geq P_1 + Q_0 = a_0a_1 + 1 + 1 > 2.$$

Dies erzeugt einen Widerspruch und wir können schließen, dass der Radikand kein Quadrat ist und damit α_0 auch irrational ist.

Wir haben damit auch direkt gezeigt, dass jeder reinperiodische Kettenbruch eine quadratische Irrationalität darstellt, dies werden wir später in einem Satz festhalten.

Durch Gleichung (5.3) haben wir jetzt auch eine Formel zur Berechnung für reinperiodische Kettenbrüche erlangt. Es müssen nach dem Bildungsgesetz 2.6 nur P_{k-1} und Q_{k-1} bestimmt werden – die mit kleinerem Index erhalten wir bei der Berechnung durch die Rekursion – und wir erhalten eine Lösung für unser gesuchtes α_0 .

Bis jetzt sind wir nur auf die Gleichheit von $\alpha_0 = \alpha_k$ eingegangen, aber wegen $\alpha_0 = \alpha_{nk}$ mit $n \in \mathbb{N}$, dürfen wir in unseren Rechnungen auch k durch nk ersetzen und erhalten dadurch für α_0 noch unendlich viele weitere quadratische Gleichungen der Form:

$$Q_{nk-1}x^2 + (Q_{nk-2} - P_{nk-1})x - P_{nk-2} = 0.$$

Die Lösungen sind identisch, weil α_0 eine eindeutig bestimmte irrationale Zahl darstellt. Wir werden diese Feinheit jetzt nicht weiter beweisen.⁵

Auch für reinperiodische Kettenbrüche haben wir einen in *Mathematica* programmierten Algorithmus. In der Funktion **ReinPeriodischerKettenbruch** wird Gleichung (5.3) verwendet –mit den Funktionen **KonvergentenP** und **KonvergentenQ** werden dann die P_k und Q_k bestimmt– um einen periodischen Kettenbruch zu berechnen. Der Kettenbruch wird in eine Liste eingegeben und der periodische Anteil in einer weiteren Liste. Daher haben wir bei einem reinperiodischen Kettenbruch eine Liste in einer Liste.

⁵Der Leser kann den Beweis in [Per77] §19 finden.

5.1.3 Gemischtperiodische Kettenbrüche

Eine allgemeinere Form der periodischen Kettenbrüche sind die gemischtperiodischen Kettenbrüche. Bei diesen fängt die Periode nicht mit dem Anfangsglied a_0 an, sondern es gibt eine Vorperiode $a_0, a_1, \dots, a_k$. Der Kettenbruch hat die Gestalt wie in Definition 5.1 beschrieben.

Bei einem gemischtperiodischen Kettenbruch kann das Anfangsglied a_0 auch kleiner als Null sein, da es sich nicht – wie beim reinperiodischen – später als Teilnenner wiederholt. Die Periode verhält sich wie bei einem reinperiodischen Kettenbruch: $b_i = b_{i+k}$. Wie wir später auch sehen werden, betrachten wir bei der Berechnung die Vorperiode und die Periode getrennt. Ist die Periodenlänge der Vorperiode gleich Null, haben wir einen reinperiodischen Kettenbruch. Wir sehen, dass der reinperiodische Kettenbruch ein Spezialfall des gemischtperiodischen ist.

Ein gemischtperiodischer Kettenbruch sieht wie folgt aus:

$$\alpha_0 = [a_0; a_1, \dots, a_k, \overline{b_1, b_2, \dots, b_n}].$$

Um die Notation der allgemeinen Berechnung aber zu vereinfachen, werden wir den Kettenbruch wie folgt aufschreiben:

$$\alpha_0 = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n-1}}]. \quad (5.4)$$

Nun sind alle Teilnenner b_k durch a_k ersetzt worden.

Ein Kettenbruch, wie in (5.4), wird wie folgt berechnet. Nach dem Bildungsgesetz für die Konvergenten 2.6 gilt folgende Beziehung:

$$\alpha_0 = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1}\alpha_k + P_{k-1}}{Q_{k-1}\alpha_k + Q_{k-2}}, \quad (5.5)$$

wobei α_k dem reinperiodischen Anteil

$$\alpha_k = [\overline{a_k; a_{k+1}, \dots, a_{k+n-1}}]$$

des Kettenbruches entspricht, den wir mit Hilfe von (5.3) bereits berechnen können. Da α_0 rational durch α_k ausgedrückt werden kann und α_k eine quadratische Irrationalität ist, ist auch α_0 eine solche. Damit wäre auch bewiesen, dass ein gemischtperiodischer Kettenbruch eine quadratische Irrationalität darstellt.

Die quadratische Gleichung für α_0 kann in verschiedenen Gestalten dargestellt werden. Wegen $\alpha_{k+n} = \alpha_k$ erhalten wir die Gleichung:

$$\alpha_0 = \frac{P_{k+n-1}\alpha_k + P_{k+n-2}}{Q_{k+n-1}\alpha_k + Q_{k+n-2}}.$$

Durch Auflösen nach α_k ergibt sich:

$$\alpha_k = \frac{P_{k+n-2} - Q_{k+n-2}\alpha_0}{Q_{k+n-1}\alpha_0 - P_{k+n-1}}. \quad (5.6)$$

Weiterhin gilt aber auch Gleichung (5.5). Wenn wir jetzt in diese (5.6) für α_k einsetzen, ergibt sich:

$$\alpha_0 = \frac{P_{k-1} \frac{P_{k+n-2} - Q_{k+n-2} \alpha_0}{Q_{k+n-1} \alpha_0 - P_{k+n-1}} + P_{k-2}}{Q_{k-1} \frac{P_{k+n-2} - Q_{k+n-2} \alpha_0}{Q_{k+n-1} \alpha_0 - P_{k+n-1}} + Q_{k-2}}.$$

Diesen Ausdruck formen wir jetzt äquivalent um:

$$\begin{aligned} & \alpha_0 \frac{(Q_{k-1} P_{k+n-2} - Q_{k-1} Q_{k+n-2} \alpha_0)}{Q_{k+n-1} \alpha_0 - P_{k+n-1}} + Q_{k-2} \alpha_0 \\ &= \frac{P_{k-1} P_{k+n-2} - P_{k-1} Q_{k+n-2} \alpha_0}{Q_{k+n-1} \alpha_0 - P_{k+n-1}} + P_{k-2} \\ \Leftrightarrow & Q_{k-1} P_{k+n-2} \alpha_0 - Q_{k-1} Q_{k+n-2} \alpha_0^2 - P_{k-1} P_{k+n-2} - P_{k-1} Q_{k+n-2} \alpha_0 \\ &= P_{k-2} Q_{k+n-1} \alpha_0 - P_{k-2} P_{k+n-1} - Q_{k-2} Q_{k+n-1} \alpha_0^2 + P_{k+n-1} Q_{k-2} \alpha_0 \\ \Leftrightarrow & \alpha_0^2 (Q_{k-2} Q_{k+n-1} - Q_{k-1} Q_{k+n-2}) + \\ & \alpha_0 (Q_{k-1} P_{k+n-2} + P_{k-1} Q_{k+n-2} - P_{k-2} Q_{k+n-1} - Q_{k-2} P_{k+n-1}) + \\ & (P_{k-2} P_{k+n-1} - P_{k-1} P_{k+n-2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten die quadratische Gleichung:

$$A \alpha_0^2 + B \alpha_0 + C = 0, \quad (5.7)$$

wobei

$$\begin{aligned} A &:= Q_{k-2} Q_{k+n-1} - Q_{k-1} Q_{k+n-2}, \\ B &:= Q_{k-1} P_{k+n-2} + P_{k-1} Q_{k+n-2} - P_{k-2} Q_{k+n-1} - Q_{k-2} P_{k+n-1}, \\ C &:= P_{k-2} P_{k+n-1} - P_{k-1} P_{k+n-2}. \end{aligned}$$

Nach unserer Tabelle 2.1 gilt:

$$\begin{aligned} P_{-2} &= 0, \quad P_{-1} = 1 \quad \text{und} \\ Q_{-2} &= 1, \quad Q_{-1} = 0. \end{aligned}$$

Mit Berücksichtigung der Werte aus Tabelle 2.1 setzen wir in (5.7) $k = 0$ und erhalten die spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} A &= Q_{n-1}, \\ B &= Q_{n-2} - P_{n-1}, \\ C &= -P_{n-2}. \end{aligned}$$

Wenn wir die spezielle Lösung in die quadratische Gleichung einsetzen, entspricht sie der Gleichung für reinperiodische Kettenbrüche:

$$Q_{n-1} \alpha_0^2 + (Q_{n-2} - P_{n-1}) \alpha_0 - P_{n-2} = 0. \quad (5.8)$$

Wir können jetzt sogar zeigen, dass für $k > 0$ die Gleichung $A\alpha_0^2 + B\alpha_0 + C = 0$ immer eine quadratische Gleichung ist. Für $k > 0$ könnte vielleicht $A = B = C = 0$ eine Lösung der quadratischen Gleichung sein, die uns bei der Berechnung von α_0 nicht weiter helfen würde. Dies ist aber nicht möglich, denn wenn $A = 0$ ist, folgt:

$$Q_{k-2}Q_{k+n-1} = Q_{k-1}Q_{k+n-2}.$$

Nach dieser Gleichung muss die rechte Seite durch Q_{k+n-1} teilbar sein, der Faktor Q_{k+n-1} kann aber nicht durch Q_{k+n-2} teilbar sein, da sie nach Voraussetzung des Bildungskriteriums teilerfremd sind. Daher muss der Faktor Q_{k-1} durch Q_{k+n-1} teilbar sein. Dies ist aber ein Widerspruch, da nach dem Bildungsgesetz 2.6 und Lemma 2.10 $Q_{k-1} < Q_{k+n-1}$ gilt.

Dieser Schluss ist ungültig, wenn $k = 0$ gilt, weil dann $Q_{-1} = 0$ ist. Dieser Fall ist aber schon erledigt, da er zu reiner Periodizität führt.

Es bleibt nur noch die Frage zu beantworten, welche der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung dem Kettenbruch entspricht. Es gibt zwei Möglichkeiten, die Lösung zu bestimmen.

Die erste ist, dass wir eine quadratische Gleichung für α_k aufstellen. Wie wir von den reinperiodischen Kettenbrüchen wissen, hat α_k dann eine eindeutig bestimmte Wurzel und zwar nur die positive. Durch Gleichung (5.5) ist dann auch der Wert für α_0 eindeutig festgelegt.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, dass wir direkt an die Gleichung $A\alpha_0^2 + B\alpha_0 + C = 0$ anknüpfen. Es muss nämlich eine der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung zwischen dem Intervall a_0 und $a_0 + 1$ liegen. Liegt in dem Intervall nur eine, so muss diese α_0 sein. Befinden sich beide Wurzeln im Intervall von a_0 bis $a_0 + 1$, betrachten wir das nächst kleinere Intervall unserer Kettenbruchentwicklung. Dieses geht von $[a_0; a_1]$ bis $[a_0; a_1 + 1]$. Der Wert α_0 muss auch in diesem engeren Intervall liegen. Falls weiterhin beide Wurzeln der quadratischen Gleichung in dem Intervall liegen, setzen wir das Verfahren fort. So können wir sehr schnell die richtige Lösung für unseren Kettenbruch finden, denn nach wenigen Schritten wird das Intervall mit den Kettenbrucheigenschaften sehr klein wird. Im folgenden Beispielen werden wir sehen, dass die erste Methode in der Praxis bequemer ist.

Auch für unsere gemischtperiodischen Kettenbrüche haben wir eine in *Mathematica* implementierte Funktion **GemischtPeriodischerKettenbruch**. Wie bei reinperiodischen Kettenbrüchen schon erwähnt, wird ein Kettenbruch in eine Liste eingegeben. Bei einem gemischtperiodischen Kettenbruch haben wir demnach eine Liste, in der als letztes Element eine Liste mit dem reinperiodischen Anteil steht. Wie in der Herleitung gesehen, trennen wir den periodischen Anteil und die Vorperiode. Der periodische Teil wird mit Hilfe der Funktion **ReinPeriodischerKettenbruch** bestimmt. Die Vorperiode wird mit Hilfe von Gleichung (5.5) gelöst. Der Wert des reinperiodischen Anteils wird dann noch in (5.5) eingesetzt und wir erhalten eine Lösung für unseren Kettenbruch. In der Funktion wird außerdem noch mit dem Befehl **RootReduce** die Wurzel vereinfacht, damit wir eine möglichst einfache Ausgabe haben.

Beispiel 5.2

Gegeben ist der unendliche periodische Kettenbruch $\alpha = [3; 6, \overline{1, 4}]$. Wir suchen eine

rationale Darstellung für die irrationale Zahl α . Zunächst schreiben wir:

$$\alpha = [3; 6, y] \quad \text{mit } y = [\overline{1; 4}] = [1; 4, y].$$

Ist die Periodenlänge n nicht so groß, so ist es meistens bequemer, die quadratische Gleichung für den reinperiodischen Anteil des Kettenbruch aufzustellen, als ihn mit Gleichung (5.8) zu berechnen. Das führt uns für y zu folgender Gleichung:

$$y = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{y}} = 1 + \frac{y}{4y + 1} = \frac{5y + 1}{4y + 1}.$$

Die daraus resultierende quadratische Gleichung lautet:

$$4y^2 - 4y - 1 = 0.$$

Da nach der Definitionen stets $y > 0$ gelten muss, kommt von den beiden Lösungen:

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2},$$

nur die positive in Betracht, so dass wir

$$y = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

erhalten.

Um zu entscheiden, welche Wurzel die gesuchte ist, können wir auch prüfen, welche der beiden Lösungen y_1 oder y_2 im Intervall $a_0 = 1$ und $a_0 + 1 = 2$ liegt. Der Teilnenner a_0 ist das Anfangsglied des reinperiodischen Anteils y . Wie in der Herleitung als zweite Möglichkeit erwähnt, muss die Lösung α in diesem Intervall oder einem der nächst kleineren liegen. Wir können aber sofort erkennen, dass nur y_1 im Intervall zwischen a_0 und $a_0 + 1$ liegt. Diese Variante wird in der Praxis aber sehr selten angewandt.

Unser Kettenbruch $\alpha = [3; 6, y]$ stellt sich nun wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \alpha &= 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}} = \frac{25 + 19\sqrt{2}}{8 + 6\sqrt{2}} \\ &= \frac{(25 + 19\sqrt{2})(8 - 6\sqrt{2})}{(8 + 6\sqrt{2})(8 - 6\sqrt{2})} = \frac{14 - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine rationale Darstellung für unseren Kettenbruch erhalten:

$$[3; 6, \overline{1, 4}] = \frac{14 - \sqrt{2}}{4}.$$

Nun schauen wir uns die Aufgabe noch mit der in *Mathematica* programmierten Funktion an:

`In[16]:= GemischtPeriodischerKettenbruch[{3, 6, {1, 4}}]`

`Out[16]=  $\frac{1}{4} (14 - \sqrt{2})$`

Als nächstes betrachten wir ein Beispiel, in dem die Gliederzahl n größer ist und diesmal werden wir die Berechnung mit Hilfe von den Gleichungen (5.8) und (5.5) vornehmen.

Beispiel 5.3

Der unendliche Kettenbruch $\alpha_0 = [2; 5, \overline{10, 1, 2, 1}]$ sei gegeben. Gesucht ist wieder eine rationale Darstellung der irrationalen Zahl α_0 .

Zunächst bestimmen wir die ersten beiden Konvergenten K_0 und K_1 :

$$K_0 = \frac{P_0}{Q_0} = \frac{2}{1} \quad \text{und} \quad K_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{11}{5}.$$

Nach (5.5) ist nun

$$\alpha_0 = \frac{P_1\alpha_2 + P_0}{Q_1\alpha_2 + Q_0} = \frac{11\alpha_2 + 2}{5\alpha_2 + 1}, \quad (5.9)$$

wobei α_2 der reinperiodische Anteil des Kettenbruches ist. Dieser hat die Periodenlänge $n = 4$ und ist:

$$\alpha_2 = [\overline{10, 1, 2, 1}].$$

Als nächstes stellen wir eine Tabelle für die Näherungszähler und -nenner von α_2 auf:

n	-2	-1	0	1	2	3
P_n	0	1	10	11	32	43
Q_n	1	0	1	1	3	4

Die Formel für die quadratische Gleichung lautet nach (5.8):

$$Q_{n-1}x^2 + (Q_{n-2} - P_{n-1})x - P_{n-2} = 0.$$

In diese setzen wir die Werte aus der Tabelle für $n = 4$ ein, daraus folgt:

$$4x^2 + (3 - 43)x - 32 = 0$$

oder

$$x^2 - 10x - 8 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung lösen wir auf und die positive Wurzel für α_2 ist

$$\alpha_2 = 5 + \sqrt{5^2 + 8} = 5 + \sqrt{33}.$$

Wir setzen jetzt α_2 in unsere Gleichung (5.9) für α_0 ein und erhalten:

$$\alpha_0 = \frac{11 \cdot (5 + \sqrt{33}) + 2}{5 \cdot (5 + \sqrt{33}) + 1} = \frac{55 + 11 \cdot \sqrt{33} + 2}{25 + 5 \cdot \sqrt{33} + 1} = \frac{333 - \sqrt{33}}{149}.$$

Damit haben wir eine rationale Darstellung für unseren Kettenbruch erhalten:

$$\alpha_0 = [2; 5, \overline{10, 1, 2, 1}] = \frac{333 - \sqrt{33}}{149}.$$

Wie in Beispiel 5.2 wenden wir die Funktion **GemischtPeriodischerKettenbruch** an und vergleichen die Ausgaben:

`In[17]:= GemischtPeriodischerKettenbruch[{2, 5, {10, 1, 2, 1}}]`

`Out[17]=  $\frac{1}{149} (333 - \sqrt{33})$`

5.1.4 Verhältnisse zwischen einem rein- und gemischtperiodischen Kettenbruch

Wir können einen reinperiodischen Kettenbruch auch immer in einen gemischtperiodischen umschreiben oder auch bei einem gemischtperiodischen Kettenbruch die Vorperiode verlängern. Es gilt nämlich:

$$[a_0; a_1, \dots, a_k, \overline{b_1, b_2, \dots, b_n}] = [a_0; a_1, \dots, a_k, b_1, \overline{b_2, b_3, \dots, b_n, b_1}].$$

Für einen reinperiodischen Kettenbruch gilt mit $j < k$ für $j \in \mathbb{N}$:

$$[\overline{a_0; a_1, \dots, a_{k-1}}] = [a_0; a_1, \dots, a_{j-1}, \overline{a_{j \bmod k}, a_{(j+1) \bmod k}, \dots, a_{k-1}, a_0, \dots, a_{(j-1) \bmod k}}].$$

Ferner können wir mehrere Perioden auch zu einer einzigen zusammenfassen, dies ist immer der Fall, wenn wir eine (kn) -gliedrige Periode haben, denn diese kann zu einer n -gliedrigen Periode zusammengefasst werden. Dazu betrachten wir folgende Darstellung:

$$[a_0; a_1, \dots, a_k, \overline{b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_{2n}}] = [a_0; a_1, \dots, a_k, \overline{b_1, b_2, \dots, b_n}].$$

Diese Eigenschaft werden wir nun in einer Definition festhalten:

Definition 5.4 *Ist eine Periode durch Zusammenfassung mehrerer kleinerer gebildet, so wird sie als imprimitive Periode bezeichnet, anderenfalls ist sie primitiv.*

Aus der Definition können wir auch sehen, dass die Gliederzahl einer imprimitiven Periode ein Vielfaches der Gliederzahl der dazugehörigen primitiven Periode ist.

5.2 Der Satz von Lagrange

Im Abschnitt 5.1.1 haben wir die quadratische Irrationalität kennengelernt. Dies war eine reelle irrationale Zahl, die einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt. Wir werden in diesem Abschnitt eine Haupteigenschaft der periodischen Kettenbrüche festhalten. Die Grundlagen dieses Abschnitts sind aus [Per77] §20, [RoSz92] und [Ros84].

Satz 5.5 (Satz von Euler) *Ein periodischer regelmäßiger Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalität dar.*

Aber viel bedeutender ist, dass nach Lagrange auch die Umkehrung dieses Satzes gilt.

Satz 5.6 *Der regelmäßige Kettenbruch, in welchen sich eine quadratische irrationale Zahl entwickeln lässt, ist stets periodisch.*

Diese beiden Sätze sind eine der wichtigsten Aussagen der Kettenbruchlehre, die wir im folgenden nun beweisen wollen.

Den Satz von Euler haben wir schon im Vorfeld bewiesen, als wir nachgewiesen haben, dass (5.5) eine quadratische Irrationalität ist. Daraus konnten wir später noch folgern, dass auch jeder gemischtperiodische Kettenbruch eine quadratische Irrationalität darstellt. Daher müssen wir im Folgenden nur noch Satz 5.6 zeigen.

Beweis: In diesem Beweis müssen wir beachten, dass wir mit p_k und q_k nicht die Zähler P_k und Nenner Q_k der Konvergenten meinen.

Jede quadratische irrationale Zahl hat folgende Form

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{D} + p_0}{q_0} \quad \text{mit } q_0 \neq 0, \quad (5.10)$$

wobei p_0, q_0 ganze Zahlen sind und D eine positive ganze Zahl, die kein Quadrat ist. Nun zeigen wir zunächst, dass unsere Form (5.10) die allgemeine Form der quadratischen irrationalen Zahlen ist. Wir verstehen unter $\sqrt{D}$ eine positive Wurzel, wodurch keine quadratische irrationale Zahl verloren geht. Denn wenn eine negative Wurzel vorliegt, können wir durch folgende Umformung

$$\frac{-\sqrt{D} + p_0}{q_0} = \frac{\sqrt{D} - p_0}{-q_0}$$

eine quadratische Irrationalität mit einer positiven Wurzel erzeugen. Weiter können wir voraussetzen, dass

$$\frac{D - p_0^2}{q_0} =: q_{-1} \quad (5.11)$$

eine ganze Zahl ist. Sollte dies nicht der Fall sein, so können wir von vorne herein folgendes Verfahren anwenden: Wir setzen dazu

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{Dc^2} + p_0c}{q_0c} = \frac{\sqrt{D'} + p'_0}{q'_0}$$

und die Zahl q_{-1} wird durch die Wahl eines geeigneten c sicher zu einer ganzen Zahl:

$$\frac{D' - p_0'^2}{q_0'^2} = c \frac{D - p_0^2}{q_0^2}$$

(wie wir später sehen werden, tritt dieser Fall dann auf, wenn z. B. $D - p_0^2$ eine ungerade Zahl ist und durch eine gerade Zahl q_0 geteilt wird). Wir können also davon ausgehen, dass wir unseren allgemeinen Ausdruck (5.10) voraussetzen können.

Im nächsten Schritt entwickeln wir nun α_0 in einen Kettenbruch, dabei erhalten wir:

$$\alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{\alpha_1} = \alpha_0 - a_0 = \frac{\sqrt{D} + p_0}{q_0} - a_0 = \frac{\sqrt{D} + p_0 - a_0 q_0}{q_0}.$$

Wir lösen die Gleichung nun nach α_1 auf:

$$\alpha_1 = \frac{q_0}{\sqrt{D} + p_0 - a_0 q_0}.$$

Durch Umstellen des Bruches ergibt sich:

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{D} + a_0 q_0 - p_0}{\frac{1}{q_0}[D - (a_0 q_0 - p_0)^2]} = \frac{\sqrt{D} + p_1}{q_1},$$

wobei

$$\begin{aligned} p_1 &= a_0 q_0 - p_0, \\ q_1 &= \frac{D - (a_0 q_0 - p_0)^2}{q_0} = \frac{D - p_0^2 + 2a_0 q_0 p_0 - a_0^2 q_0^2}{q_0} \end{aligned}$$

sind. Wir setzen (5.11) in q_1 ein: $q_1 = q_{-1} + 2a_0 p_0 - a_0^2 q_0$. Nun können wir sagen, dass unsere Terme p_1 und q_1 beide wieder ganze Zahlen sind und außerdem ist

$$\frac{D - p_1^2}{q_1} = \frac{D - (a_0 q_0 - p_0)^2}{q_1} = q_0,$$

also wieder eine ganze Zahl. Der Ausdruck

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{D} + p_1}{q_1}$$

hat also die gleichen Eigenschaften, die wir in (5.10) vorausgesetzt haben. Gehen wir nun in der Kettenbruchentwicklung weiter und bestimmen den Ausdruck $\alpha_1 = a_1 + 1/\alpha_2$, so wird auch α_2 wieder die gleichen Eigenschaften aufweisen. Indem wir das Verfahren fortsetzen, erhalten wir immer die vollständigen Quotienten in der Gestalt

$$\alpha_k = \frac{\sqrt{D} + p_k}{q_k}, \quad (5.12)$$

wobei p_k , q_k und $\frac{D - p_k^2}{q_k}$ immer ganze Zahlen sind. Wir bezeichnen mit η_k die konjugierte Zahl zu α_k also:

$$\eta_k = \frac{-\sqrt{D} + p_k}{q_k}. \quad (5.13)$$

Wir haben für α_k unsere Gleichung

$$\alpha_0 = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k] = \frac{P_{k-1}\alpha_k + P_{k-2}}{Q_{k-1}\alpha_k + Q_{k-2}}. \quad (5.14)$$

Indem wir nun das Vorzeichen von $\sqrt{D}$ ändern – also in die konjugierte Form überführen –, können wir für η_0 die Gleichung erhalten:

$$\eta_0 = \frac{P_{k-1}\eta_k + P_{k-2}}{Q_{k-1}\eta_k + Q_{k-2}}. \quad (5.15)$$

(Mit den P_k und Q_k meinen wir hier wieder den Zähler und Nenner der Konvergenten, des Kettenbruches).

Wir zeigen nun, dass diese Umformung von (5.14) in (5.15) zulässig ist, denn wenn wir Gleichung (5.14) mit ihrem Nenner multiplizieren, erhalten wir die Form:

$$U + V\sqrt{D} = 0, \quad (5.16)$$

und die umgeformte Gleichung (5.15) sieht wie folgt aus:

$$U - V\sqrt{D} = 0. \quad (5.17)$$

In beiden Gleichungen sind U und V die gleichen ganzen Zahlen. Es muss jetzt nur noch gezeigt werden, dass (5.17) aus (5.16) folgt, um die Zulässigkeit zu beweisen. Aus (5.16) folgt, dass $U = 0$ und $V = 0$ sind, denn wenn es nicht so wäre, würde $\sqrt{D} = -U/V$ gelten, also $\sqrt{D}$ würde rational sein. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Daraus folgt, dass auch $U - V\sqrt{D} = 0$ gilt. Daher können wir das Vorzeichen von $\sqrt{D}$ ohne weiteres ändern.

Nun lösen wir Gleichung (5.15) nach η_k auf:

$$\eta_k = -\frac{\eta_0 Q_{k-2} - P_{k-2}}{\eta_0 Q_{k-1} - P_{k-1}} = -\frac{Q_{k-2}}{Q_{k-1}} \cdot \frac{\eta_0 - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}}{\eta_0 - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}}.$$

Da P_{k-1}/Q_{k-1} und P_{k-2}/Q_{k-2} Näherungsbrüche der irrationalen Zahl α_0 sind, strebt der letzte Bruch unserer Gleichung bei wachsendem k gegen den Grenzwert $\frac{\eta_0 - \alpha_0}{\eta_0 - \alpha_0} =$

1. Wir erhalten für die Gleichung:

$$\eta_k = -\frac{Q_{k-2}}{Q_{k-1}}(1 + \varepsilon_k),$$

wobei ε_k von k abhängig ist. Bei wachsendem k wird $|\varepsilon_k|$ beliebig klein. Aus diesem Grund wird η_k für genügend große Werte k negativ.

Wir können fortfahren und behaupten, dass η_k zwischen -1 und 0 liegt. Denn wenn wir die Gleichung $\alpha_{k-1} = a_{k-1} + 1/\alpha_k$ unter den weiter oben aufgeführten Argumenten

in die konjugierte Zahl $\eta_{k-1} = a_{k-1} + 1/\eta_k$ überführen, können wir eine Abschätzung vornehmen. Wir wissen, dass bei genügend großen k auch η_{k-1} negativ ist, daher können wir schließen, dass

$$\frac{1}{\eta_k} = -a_{k-1} + \eta_{k-1} < -a_{k-1} \leq -1$$

gilt. Da für genügend große k die Gleichung $|\varepsilon_k| < 1$ gilt, folgt daraus $\eta_i < 0$ für alle $i > k$, damit folgt für η_k :

$$-1 < \eta_k < 0.$$

Auf der anderen Seite wissen wir aber auch, dass $\alpha_k > 1$ ist und können dadurch zeigen, dass die Zahlen $\alpha_k - \eta_k$ und $\alpha_k + \eta_k$ positiv sind. Indem wir die Gleichungen (5.12) und (5.13) einsetzen, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\alpha_k - \eta_k &= \frac{\sqrt{D} + p_k}{q_k} - \frac{-\sqrt{D} + p_k}{q_k} = \frac{2\sqrt{D}}{q_k} > 0, \\ \alpha_k + \eta_k &= \frac{\sqrt{D} + p_k}{q_k} + \frac{-\sqrt{D} + p_k}{q_k} = \frac{2p_k}{q_k} > 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass p_k und q_k größer als 0 sind. Damit η_k aber negativ werden kann, muss nach der Gleichung (5.12) $p_k < \sqrt{D}$ sein. Wir bezeichnen nun mit E die größte ganze Zahl, die kleiner als $\sqrt{D}$ ist, somit gilt für p_k :

$$p_k \leq E.$$

Nun können wir noch ein Verhältnis für q_k mit E aufstellen. Da $\alpha_k > 1$ gilt, gilt auch

$$\alpha_k = \frac{\sqrt{D} + p_k}{q_k} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad q_k < \sqrt{D} + p_k,$$

also folgt daraus:

$$q_k \leq 2E.$$

Damit haben wir gezeigt, dass p_k und q_k ab einem gewissen Index k positive ganze Zahlen sind, die höchstens gleich E bzw. $2E$ sein können. Es ist nun so, dass für p_k nur E und für q_k nur $2E$ verschiedene Möglichkeiten vorliegen. Dies bringt uns zu folgendem Schluss: Da für $\alpha_k = (\sqrt{D} + p_k)/q_k$ insgesamt nur $2E^2$ verschiedene Möglichkeiten vorliegen, müssen mehrere α_k den gleichen Wert haben. Gelte also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha_k = \alpha_{k+n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dies würde bedeuten, dass

$$[a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots] = [a_{k+n}; a_{k+n+1}, a_{k+n+2}, \dots]$$

gilt und weil eine unendliche regelmäßige Kettenbruchentwicklung nur auf eine bestimmte Weise möglich ist, muss daraus folgen, dass

$$a_{k+n} = a_k, \quad a_{k+n+1} = a_{k+1}, \quad a_{k+n+2} = a_{k+2}, \quad \dots$$

gilt und somit haben wir hiermit die Periodizität der Kettenbruchentwicklung einer quadratischen Irrationalität gezeigt. $\square$

Wir betrachten nun ein Beispiel, welches wir mit den vorgestellten Regeln in einen periodischen Kettenbruch entwickeln.

Beispiel 5.4

Gegeben sei die Zahl $\alpha = (\sqrt{24} + 5)/2$. Diese soll in einen Kettenbruch entwickelt werden.

Die Zahlen p_k und q_k sollen die gesamte Rechnung über ganz bleiben, dazu muss q_{-1} aus (5.11) eine ganze Zahl sein. Dies ist bei den Werten $D = 24$, $p_0 = 5$ und $q_0 = 2$ nicht der Fall und deshalb muss der Term mit $c = 2$ erweitert werden. Das Erweitern ist nicht zwingend nötig, aber es tritt ansonsten das Problem auf, dass im späteren Verlauf p_k und q_k keine ganzen Zahlen mehr werden. Wie im Beweis oben angegeben, multiplizieren wir unseren Bruch also mit einem geeigneten c , damit wir immer ganze Zahlen für p_k und q_k erhalten. Mit $c = 2$ sind die Anforderungen erfüllt und wir rechnen mit $(\sqrt{96} + 10)/4$ weiter. Die a_k sind der ganzzahlige Anteil unseres Bruches $(\sqrt{D} + p_k)/q_k$. Für die Errechnung des Kettenbruches $(\sqrt{96} + 10)/4$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{\sqrt{96} + 10}{4} = 4 + \frac{\sqrt{96} - 6}{4}, & a_0 &= 4, \\ \alpha_1 &= \frac{4}{\sqrt{96} - 6} = \frac{\sqrt{96} + 6}{15} = 1 + \frac{\sqrt{96} - 9}{15}, & a_1 &= 1, \\ \alpha_2 &= \frac{15}{\sqrt{96} - 9} = \frac{\sqrt{96} + 9}{1} = 18 + \frac{\sqrt{96} - 9}{1}, & a_2 &= 18, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{\sqrt{96} - 9} = \frac{\sqrt{96} + 9}{15} = 1 + \frac{\sqrt{96} - 6}{15}, & a_3 &= 1, \\ \alpha_4 &= \frac{15}{\sqrt{96} - 6} = \frac{\sqrt{96} + 6}{4} = 3 + \frac{\sqrt{96} - 6}{4}, & a_4 &= 3, \\ \alpha_5 &= \frac{4}{\sqrt{96} - 6} = \frac{\sqrt{96} + 6}{15} = \alpha_1\end{aligned}$$

Da $\alpha_1 = \alpha_5$, haben wir die ganze Periode errechnet, sie hat eine Periodenlänge von 4 und es gilt:

$$\frac{\sqrt{24} + 5}{2} = \frac{\sqrt{96} + 10}{4} = [4; \overline{1, 18, 1, 3}].$$

Bei dieser Vorgehensweise finden wir den nächsten Nenner q_{k+1} immer dadurch, dass wir $D - p_{k+1}^2$ durch q_k teilen. Dies ist eine sehr gute Kontrolle, da wir bewiesen haben, dass q_k immer eine ganze Zahl ist. Geht diese Rechnung nicht auf, haben wir im unmittelbaren Schritt davor einen Fehler gemacht, den wir dann schnell korrigieren können.

5.2.1 Formel zur Bestimmung der quadratischen Irrationalitäten

Nun wollen wir zu einer Berechnungsart kommen, die wesentlich kürzer ist und die ohne viele Divisionen auskommt. Dies ist sehr wichtig für eine algorithmische Programmierung. Der Nachteil dieser Rechnung ist nur, dass die eben angesprochene Kontrolle verloren geht.⁶

⁶Literatur zu diesem Abschnitt [Per77] §21 und [Ros84].

Unsere Ausgangsgleichung ist $\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}$, aus dieser folgt:

$$\frac{\sqrt{D} + p_k}{q_k} = a_k + \frac{q_{k+1}}{\sqrt{D} + p_{k+1}}.$$

Nun multiplizieren wir mit dem Hauptnenner und erhalten die Gleichung:

$$D + p_k p_{k+1} + (p_k + p_{k+1})\sqrt{D} = a_k q_k \sqrt{D} + a_k q_k p_{k+1} + q_k q_{k+1}.$$

Diese Formel spaltet sich wegen der Irrationalität von $\sqrt{D}$ sofort in zwei Teile, nämlich

$$D + p_k p_{k+1} = a_k q_k p_{k+1} + q_k q_{k+1}, \quad (5.18)$$

$$p_k + p_{k+1} = a_k q_k. \quad (5.19)$$

Als nächstes multiplizieren wir Gleichung (5.19) mit p_{k+1} und subtrahieren sie dann von Gleichung (5.18), so erhalten wir:

$$D - p_{k+1}^2 = q_k q_{k+1}. \quad (5.20)$$

Unter der Berücksichtigung von $(D - p_0^2)/q_0 = q_{-1}$ gilt diese Formel auch für $k = -1$. Nun setzen wir $k - 1$ für k in (5.20) ein und subtrahieren die entstandene Gleichung von (5.20):

$$q_k q_{k+1} - q_{k-1} q_k = p_k^2 - p_{k+1}^2 = (p_k - p_{k+1})(p_k + p_{k+1}).$$

Auf der rechten Seite können wir nun (5.19) einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned} q_k q_{k+1} - q_{k-1} q_k &= (p_k - p_{k+1}) a_k q_k. \\ \Leftrightarrow \quad q_{k+1} - q_{k-1} &= (p_k - p_{k+1}) a_k. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Schreiben wir Formel (5.19) und (5.21) wie folgt um

$$p_{k+1} = a_k q_k - p_k, \quad (5.22)$$

$$q_{k+1} = a_k (p_k - p_{k+1}) + q_{k-1}, \quad (5.23)$$

erhalten wir Rekursionsformeln für p_k und q_k . Wir können nun für ein gegebenes α_0 unsere Berechnungen in tabellarischer Form angeben:

$$\begin{array}{cccccc} p_0, & p_1, & p_2, & p_3, & p_4, & \dots \\ q_0, & q_1, & q_2, & q_3, & q_4, & \dots \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \dots \end{array}$$

Die Zahlen p_0 und q_0 sind gegeben, damit können wir schnell a_0 bestimmen. Die Zahl p_1 ergibt sich dann sofort aus Gleichung (5.22) für $k = 0$. Für q_1 benötigen wir nochmals eine Division, wie in Beispiel 5.4 erwähnt, ergibt sich q_1 nach (5.20) durch $q_1 = (D - p_1^2)/q_0$. Sobald wir dann p_1 , q_1 und a_1 haben, brauchen wir zur weiteren

Berechnung die Formeln (5.22) und (5.23), um alle weiteren p_k und q_k zu bestimmen. Nur a_k muss, wie im früheren Verfahren, immer noch als größte in $(\sqrt{D} + p_k)/q_k$ erhaltene ganze Zahl bestimmt werden. Mit anderen Worten suchen wir die größte ganze Zahl a der Art, dass $aq_k - p_k$ kleiner als $\sqrt{D}$ bleibt.

In der Funktion **QuadratwurzelInPeriodischenKettenbruch** ist der oben hergeleitete Algorithmus implementiert. Als Parameter wird eine quadratische Irrationalität übergeben und es wird mit einer **If**-Abfrage Gleichung (5.11) nachgeprüft. Falls nötig erweitert die Abfrage die Eingabe mit einer Zahl c . Die p_k werden durch (5.22) bestimmt. Die Zahl für q_1 wird durch (5.11) bestimmt. Die weiteren q_k werden dann mit (5.23) errechnet. Die a_k werden mit Hilfe der **Floor**-Funktion nach Gleichung (5.10) bestimmt. Die p_k , q_k und a_k werden in drei Listen abgespeichert. Mit einer **while**-Abfrage wird die Berechnung p_k , q_k und a_k durchgeführt bis in den Listen ein gleiches Zahlenpaar $\{p_i, q_i\}$ auftritt. Nun haben wir eine Liste für unsere p_k , q_k und a_k . In unserer Liste von p_k (q_k) gibt es ein p_i (q_i) welches dem letzten Element der Liste entspricht. Die Liste der a_k wird nun in zwei Listen geteilt. Aus der einen werden alle Elemente bis zum Index i gelöscht und aus der anderen alle, die einen höheren Index als i haben. Jetzt wird die Liste mit den höheren Indizes als letztes Element in die andere Liste eingefügt und damit haben wir unsere Liste für die Kettenbruchentwicklung gewonnen. Diese wird dann als Resultat ausgegeben.⁷

Wir greifen Beispiel 5.4 nochmals auf und berechnen es mit dem gerade kennen gelernten Verfahren:

Beispiel 5.5

Gegeben ist $\alpha = (\sqrt{96} + 10)/4$ (der Term wurde wie in Beispiel 5.4 mit 2 erweitert). Durch die Eingabe erhalten wir die Zahlen $p_0 = 10$ und $q_0 = 4$. Indem wir den größten ganzzahligen Anteil von $(\sqrt{96} + 10)/4$ bestimmen, erhalten wir $a_0 = 4$. Wir erhalten p_1 durch (5.22) und q_1 wird wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} p_1 &= a_0 q_0 - p_0 = 4 \cdot 4 - 10 = 6, \\ q_1 &= \frac{D - p_1^2}{q_0} = \frac{96 - 6^2}{4} = \frac{60}{4} = 15. \end{aligned}$$

Alle weiteren p_k und q_k können wir mit den beiden Formeln (5.22) und (5.23) errechnen. Die weiteren a_k sind die ganzzahligen Anteile von $(\sqrt{D} + p_k)/q_k$ und damit ergibt sich folgende Tabelle für unser Beispiel:

k	0	1	2	3	4	5
p_k	10	6	9	9	6	6
q_k	4	15	1	15	4	15
a_k	4	1	18	1	3	

Das Abbruchkriterium für die Entwicklung ist, wenn ein Zahlenpaar (p_k, q_k) wiederholt auftritt. Dieser Zustand ist bei $p_5 = p_1 = 6$ und $q_5 = q_1 = 15$ erreicht und damit ist die Periode bestimmt und die Kettenbruchentwicklung ist beendet.

⁷Die *Mathematica* Befehle sind in [Wol] zu finden.

Wir wenden nun unsere Funktion **QuadratwurzelInPeriodischenKettenbruch**⁸ an:

$In[18] := \text{QuadratwurzelInPeriodischenKettenbruch}\left[\frac{\text{Sqrt}[24] + 5}{2}\right]$

$Out[18] = \{\{4, \{1, 18, 1, 3\}\}\}$

5.3 Inverse Periode

Diesen Abschnitt wollen wir mit einer Definition beginnen, die wir schon im Beweis zu Satz 5.6 gesehen haben.

Definition 5.7 Eine quadratische, irrationale Zahl heißt *reduziert*, wenn sie größer als 1 ist und ihre Konjugierte zwischen -1 und 0 liegt.

Details zu dieser Definition sind in [Per77] §22 zu finden.

Eine große Rolle bei der periodischen Kettenbruchtheorie spielt die Inversität. Dieses Thema wollen wir nur in einem kurzem Abschnitt betrachten und nicht genauer in den Bereich eintauchen, aber ihre Kernaussagen werden uns bei späteren Beweisen nützlich sein.

Definition 5.8 Ein periodischer Kettenbruch, der durch die Umkehrung der Reihenfolge der Glieder eines anderen periodischen Kettenbruches entsteht, heißt *inverses*,

$$[\overline{a_{k-1}; a_{k-2}, \dots, a_2, a_1, a_0}],$$

er ist also *invers* zu

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-2}, a_{k-1}].$$

Es gilt folgender Satz⁹:

Satz 5.9 (Galois) Ist α_0 ein reinperiodischer regelmäßiger Kettenbruch der Form

$$\alpha_0 = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}}]$$

und η_0 die zu α_0 konjugierte Zahl, dann ist auch $-1/\eta_0$ reinperiodisch und die dazugehörige Kettenbruchentwicklung ist die Inverse von α_0 :

$$-\frac{1}{\eta_0} = [\overline{a_{k-1}, \dots, a_1, a_0}].$$

Beweis: Sei $\alpha_0 = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}}]$ ein reinperiodischer Kettenbruch, also α_0 eine reduzierte Zahl. Dann sind die vollständigen Quotienten α_k ebenfalls reduziert und es gilt:

$$\alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \alpha_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{\alpha_0}.$$

⁸Weiter Informationen und Beispiele sind auf der beliegenden CD zu finden.

⁹Weitere Details über den Satz sind in [Ros84] zu finden.

Es gilt die Beziehung $\alpha_0 = \alpha_k$. Gehen wir nun zu den konjugierten Zahlen über, dann erhalten wir:

$$\eta_0 = a_0 + \frac{1}{\eta_1}, \eta_1 = a_1 + \frac{1}{\eta_2}, \dots, \eta_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{\eta_0}.$$

Indem wir die Terme umstellen und in umgekehrter Reihenfolge schreiben, ergibt sich:

$$-\frac{1}{\eta_0} = a_{k-1} - \eta_{k-1}, -\frac{1}{\eta_{k-1}} = a_{k-2} - \eta_{k-2}, \dots, -\frac{1}{\eta_1} = a_0 - \eta_0.$$

Zur Verdeutlichung benennen wir $\beta_{k-i} = -1/\eta_i$ für $i = 0, 1, \dots, k-1$. Da α_k reduziert ist, gilt $-1 < \eta_k < 0$ und somit sind alle $\beta_k > 1$. Wir erhalten durch Einsetzen von β_{k-i} :

$$\beta_0 = a_{k-1} + \frac{1}{\beta_1}, \beta_1 = a_{k-2} + \frac{1}{\beta_2}, \dots, \beta_{k-2} = a_1 + \frac{1}{\beta_{k-1}}, \beta_{k-1} = a_0 + \frac{1}{\beta_0}.$$

Hieraus erhalten wir die Kettenbruchentwicklung

$$-\frac{1}{\eta_0} = \beta_0 = [\overline{a_{k-1}, \dots, a_1}, a_0].$$

Damit ist unser Satz bewiesen. □

5.4 Quadratwurzel aus rationalen Zahlen

Wir werden in diesem Abschnitt D als eine positive rationale Zahl voraussetzen, die kein Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Dann ist $\sqrt{D}$ eine quadratische Irrationalität. Wenn wir diese in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickeln, gibt es ein Glied, welches der Periode vorangeht, so dass

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_k}] \quad (5.24)$$

gilt. Diese Eigenschaft werden wir nicht beweisen, sondern als vorausgesetzt ansehen.¹⁰

Indem wir a_0 auf beiden Seiten unserer Gleichung subtrahieren und sie umstellen, ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{D} - a_0} = [\overline{a_1; a_2, \dots, a_k}].$$

Diesen reinperiodischen Kettenbruch können wir jetzt mit Hilfe des Satzes 5.9 von Galois, wie folgt umformen:

$$-\frac{1}{-\sqrt{D} - b_0} = \sqrt{D} + a_0 = [\overline{a_k; a_{k-1}, \dots, a_1}] = [a_k; \overline{a_{k-1}, \dots, a_1, a_k}].$$

¹⁰Der Satz und der Beweis können im [Per77] §24 und §25 nachgelesen werden.

Aus Gleichung (5.24) erhalten wir durch Addition mit a_0 andererseits aber:

$$\sqrt{D} + a_0 = [2a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_k}].$$

Unter diesen Umständen müssen sich wegen der Eindeutigkeit der Kettenbruchentwicklung folgende Eigenschaften ergeben:

$$a_k = 2a_0, \quad a_{k-1} = a_1, \quad a_{k-2} = a_2, \quad \dots, \quad a_1 = a_{k-1}.$$

Dies bedeutet für die Kettenbruchentwicklung, dass für die Zahl $\sqrt{D}$ gilt:

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}].$$

Für eine rationale Zahl D , die kein Quadrat einer rationalen Zahl ist, gilt also, dass die Kettenbruchentwicklung mit einem Anfangsglied a_0 beginnt und dann der periodische Teil aus einem symmetrischen Teil und dem doppelten Anfangsglied besteht.

Der folgende Satz bestätigt diese Aussage.

Satz 5.10 *Der regelmäßige Kettenbruch für die irrationale Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl $\alpha > 1$ hat die Form*

$$\alpha = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}].$$

Umgekehrt stellt jeder regelmäßige Kettenbruch von dieser Form die Quadratwurzel einer rationalen Zahl $\alpha > 1$ dar.

Der Satz gilt auch für a_k mit $k = 0$, dann folgt, dass der Symmetrieteil aus Null Gliedern besteht.

Beweis: Aufgrund der Vorüberlegungen haben wir die erste Richtung schon gezeigt. Es bleibt zu zeigen, dass ein regelmäßiger Kettenbruch von dieser Gestalt

$$[a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}]$$

stets eine Quadratwurzel einer rationalen Zahl ist. Da der Kettenbruch periodisch ist, wissen wir, dass er eine quadratische Irrationalität α_0 ist:

$$\alpha_0 = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}].$$

Indem wir nun das Anfangsglied a_0 auf beiden Seiten subtrahieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \alpha_0 - a_0 &= \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0]} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_0 - a_0} &= [a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0]. \end{aligned}$$

Weiter ist uns bekannt, dass jede quadratische Irrationalität α_k eine Konjugierte besitzt, die wir mit η_k bezeichnen. Mit dieser Voraussetzung können wir den Satz 5.9 von Galois anwenden und erhalten

$$-\frac{1}{\frac{1}{\alpha_0 - a_0}} = a_0 - \eta_0 = [\overline{2a_0, a_1, a_2, \dots, a_2, a_1}].$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten a_0 , erhalten wir:

$$-\eta_0 = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}].$$

Das heißt aber, dass die Kettenbrüche α_0 und $-\eta_0$ gleich sind und somit ist $\alpha_0 + \eta_0 = 0$. Damit ergibt sich für α_0 eine quadratische Gleichung der Form:

$$a\alpha_0^2 - c = 0 \quad \text{mit } a \neq 0, c \in \mathbb{Z},$$

womit sich für α_0 folgendes ergibt:

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Die Voraussetzung $\alpha_0 > 1$ muss erfüllt sein, denn sonst könnte $a_0 = 0$ sein und damit wäre $a_0 = 2a_0 = 0$ und der Kettenbruch wäre nicht mehr regelmäßig. Damit ist unser Satz bewiesen. $\square$

5.5 Anwendungen und Beispiele von periodischen Kettenbrüchen

5.5.1 Tafel für positive ganze Quadratwurzeln

In diesem Abschnitt wollen wir auf die Zusammensetzung von periodischen Kettenbrüchen für positive ganze Quadratwurzeln eingehen. Wir haben im Abschnitt 5.4 die Formel für Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen kennengelernt:

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}].$$

Diese Formel gilt selbstverständlich auch für positive ganze Zahlen D , die kein Quadrat sind, da jede ganze Zahl rational ist.

Für Quadratwurzeln von positiven ganzen Zahlen D gibt es eine einfache Darstellung in Form eines periodischen Kettenbruches. Es wurden schon viele Tabellen erstellt, in denen die Kettenbruchentwicklungen der Quadratwurzeln festgehalten sind. Wir wollen hier auch eine kleine Tabelle vorstellen, damit wir nachvollziehen können, wie die Werte aus einer solchen Tabelle abgelesen werden können.

In der folgenden Tabelle werden die Quadratwurzeln der ganzen Zahlen D von 1 bis 100 mit der zugehörigen Kettenbruchentwicklungen dargestellt, in der linken Spalte die Zahlen D und in der rechten die zu $\sqrt{D}$ gehörigen Kettenbruchentwicklungen. Dabei stehen in der Spalte das Anfangsglied a_0 und die erste Hälfte der symmetrischen Periode. Falls die Gliederzahl der Periode ungerade ist, wird das letzte Glied in der Tabelle eingeklammert. Dies bedeutet, dass es das Mittelglied des symmetrischen Teils ist. Ist die Periode nullgliedrig, so steht nur das Anfangsglied a_0 in der Tabelle.

Ein Auszug der Tabelle¹¹ der Quadratwurzeln und ihrer Kettenbruchentwicklungen für die Zahlen von 1 bis 100:

¹¹Tabelle aus [Per77] §26 Seite 91.

D	Teilnenner von $\sqrt{D}$	D	Teilnenner von $\sqrt{D}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
28	5, 3, (2)	76	8, 1, 2, 1, 1, 5, (4)
29	5, 2, 1	77	8, 1, 3, (2)
30	5, (2)	78	8, 1, (4)
31	5, 1, 1, 3, (5)	79	8, 1, (7)
32	5, 1, (1)	80	8, (1)
33	5, 1, (2)	82	9
34	5, 1, (4)	83	9, (9)
35	5, (1)	84	9, (6)
37	6	85	9, 4, 1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 1: Auszug der Tabelle im Anhang

Nun werden wir einige Beispiele aus dieser Tabelle erläutern.

Beispiel 5.6

Anhand eines Beispiels wollen wir nun genauer darauf eingehen, wie wir einen periodischen Kettenbruch aus der Tabelle ablesen können.

Zunächst wissen wir, dass für alle periodischen Kettenbrüche von Quadratwurzeln ganzer Zahlen die Formel

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}]$$

gilt.

Wir betrachten nun Beispiele für alle drei Fälle, die in der Tabelle auftreten können:

1. Als erstes betrachten wir das Beispiel $D = 37$. In der Tabelle steht nur die Zahl 6, dies bedeutet, dass der periodische Kettenbruch nur aus dem Anfangsglied $a_0 = 6$ und einer Periode des doppelten Anfangsgliedes $2a_0 = 12$ besteht. Der symmetrische Teil ist nullgliedrig. Daraus folgt:

$$\sqrt{37} = [a_0; \overline{2a_0}] = [6; \overline{12}].$$

2. Wir sehen uns $D = 29$ an. In der Tabelle können wir 5, 2, 1 ablesen. Das heißt, für unsere Kettenbruchentwicklung ergibt sich daraus $a_0 = 5$ und der symmetrische Teil der Periode ist 4 gliedrig. Für den Kettenbruch ergibt sich:

$$\sqrt{29} = [a_0; \overline{a_1, a_2, a_2, a_1, 2a_0}] = [5; \overline{2, 1, 1, 2, 10}].$$

3. Zuletzt schauen wir uns noch einen periodischen Kettenbruch mit ungerader Gliederzahl des symmetrischen Anteils der Periode an, etwa $D = 79$. Die eingeklammerte Zahl (7) ist das mittlere Glied des symmetrischen Anteils der Periode und es folgt:

$$\sqrt{79} = [a_0; \overline{a_1, a_2, a_1, 2a_0}] = [8; \overline{1, 7, 1, 16}].$$

5.5.2 Berechnung von periodischen Kettenbrüchen mit Hilfe des Algorithmus

Zum Abschluss betrachten wir noch ein Beispiel, indem wir einen periodischen Kettenbruch mit Hilfe des Kettenbruch-Algorithmus bestimmen.

Beispiel 5.7

Wir betrachten $\alpha = \sqrt{23} \approx 4.8$ und wollen α in einen periodischen Kettenbruch entwickeln. Dies ist auch mit dem Kettenbruch-Algorithmus zu realisieren. Mit Hilfe des Algorithmus können wir schnell und einfach unsere Teilnenner a_k bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \sqrt{23} = 4 + (\sqrt{23} - 4), & a_0 &= 4, \\
 \alpha_1 &= \frac{1}{\alpha_0 - \lfloor \alpha_0 \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{23} - 4} = \frac{\sqrt{23} + 4}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23} - 3}{7}, & a_1 &= 1, \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1 - \lfloor \alpha_1 \rfloor} = \frac{7}{\sqrt{23} - 3} = \frac{\sqrt{23} + 3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{23} - 3}{2}, & a_2 &= 3, \\
 \alpha_3 &= \frac{1}{\alpha_2 - \lfloor \alpha_2 \rfloor} = \frac{2}{\sqrt{23} - 3} = \frac{\sqrt{23} + 3}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23} - 4}{7}, & a_3 &= 1, \\
 \alpha_4 &= \frac{1}{\alpha_3 - \lfloor \alpha_3 \rfloor} = \frac{7}{\sqrt{23} - 4} = \frac{\sqrt{23} + 4}{1} = 8 + \frac{\sqrt{23} - 4}{1}, & a_4 &= 8, \\
 \alpha_5 &= \frac{1}{\alpha_4 - \lfloor \alpha_4 \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{23} - 4} = \frac{\sqrt{23} + 4}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23} - 3}{7}, & a_5 &= 1, \\
 \alpha_6 &= \frac{1}{\alpha_5 - \lfloor \alpha_5 \rfloor} = \frac{7}{\sqrt{23} - 3} = \frac{\sqrt{23} + 3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{23} - 3}{2}, & a_6 &= 3.
 \end{aligned}$$

Die a_k werden durch den größten ganzzahligen Anteil von α_k bestimmt. Für α_0 gilt $\sqrt{23} = \lfloor \alpha_0 \rfloor = 4 = a_0$. Im nächsten Schritt werden die Werte a_k und α_k in unsere Formel (3.4) aus dem Algorithmus eingesetzt. Dadurch erhalten wir α_{k+1} und durch α_{k+1} ergibt sich dann a_{k+1} :

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - \lfloor \alpha_0 \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{23} - 4} = \frac{\sqrt{23} + 4}{7} \Rightarrow a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 1.$$

An der Teilnennerberechnung können wir sehen, dass $\alpha_1 = \alpha_5$ und $\alpha_2 = \alpha_6$ ist. Dies bedeutet, dass wir einen periodischen Kettenbruch erhalten, in dem sich die Periode 1, 3, 1, 8 unendlich oft wiederholt. Die Kettenbruchentwicklung hat also die Form:

$$\sqrt{23} = [4; \overline{1, 3, 1, 8}] \approx 4.79583\dots$$

Wir können die Kettenbruchentwicklung für $\sqrt{23}$ auch unserer Tabelle im Anhang entnehmen.

Mit der Funktion **wurzelInKettenbruch** können wir diese Aufgabe wie folgt berechnen:

```
In[19]:= wurzelInKettenbruch[ $\sqrt{23}$ ]
```

```
Out[19]= {4, {1, 3, 1, 8}}
```

Die Funktion **wurzelInKettenbruch** berechnet auch Quadratwurzeln aus einer rationalen Zahl α , aber dabei ist zu beachten, dass nach Satz 5.10 $\alpha > 1$ sein muss. Um also ein $\alpha < 1$ zu bestimmen müssen wir die in *Mathematica* eingebaute Funktion **ContinuedFraction** verwenden. Denn wie wir im Beweis zu Satz 5.10 gesehen haben, wäre der Kettenbruch für $\alpha < 1$ in der Form

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}],$$

nicht mehr regelmäßig.

6 Fazit

Die Arbeit soll einen Einblick in die Theorie der Kettenbrüche geben. Wir haben gesehen, dass schwer greifbare Zahlen als Kettenbrüche ausgedrückt werden können. Es ist besonders hervorzuheben, dass irrationale Zahlen mit Hilfe einer Abschätzung vereinfacht durch Kettenbrüche dargestellt werden können. Weiter sind wir auch darauf eingegangen, wie wir Kettenbrüche wieder in eine rationale Darstellung umwandeln können.

Es wurde gezeigt, wie wir rationale Zahlen als endlichen Kettenbrüche schreiben können. Die endlichen Kettenbrüche lieferten uns dann die Grundlage, um unendliche zu betrachten, wobei das größte Augenmerk darauf gerichtet war, dass wir eine irrationale Zahl durch einen unendlichen Kettenbruch abschätzen können.

Den Kern der Arbeit bildet der Kettenbruch-Algorithmus, mit dessen Hilfe wir irrationale Zahlen in einen Kettenbruch umwandeln können. Ein wichtiger Aspekt sind auch die Abschätzungen, die wir vorgenommen haben. Mit ihrer Hilfe können wir sehen, wie dicht die letzte Konvergente der Kettenbruchentwicklung an der gesuchten irrationalen Zahl liegt. Da die Konvergenten immer aus teilerfremden Zählern und Nennern bestehen, können wir sogar sagen, dass eine Konvergente die beste Approximation an eine irrationale Zahl bietet. Es ist die beste Approximation in dem Sinne, dass keine rationale Zahl mit kleinerem oder gleichem Nenner existiert, die die irrationale Zahl besser annähert.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Kettenbruchtheorie ist, dass quadratische Irrationalitäten endlich durch einen periodischen Kettenbruch dargestellt werden können. Es ist bemerkenswert, dass Kettenbrüche von quadratischen Irrationalitäten eine Regelmäßigkeit aufweisen, so dass sie endlich als periodischer Kettenbruch geschrieben werden können.

Alle in der Arbeit vorgestellten Algorithmen sind auf der beiliegenden CD in *Mathematica* implementiert und können zur Erstellung oder Umwandlung eines Kettenbruches genutzt werden.

A Tabelle

Die Tabelle¹² der Quadratwurzeln und ihre Kettenbruchentwicklung für die Zahlen von 1 bis 100:

D	Teilnenner von $\sqrt{D}$	D	Teilnenner von $\sqrt{D}$
2	1	53	7, 3, 1
3	1, (1)	54	7, 2, 1, (6)
5	2	55	7, 2, (2)
6	2, (2)	56	7, (2)
7	2, 1, (1)	57	7, 1, 1, (4)
8	2, (1)	58	7, 1, 1, 1
10	3	59	7, 1, 2, (7)
11	3, (3)	60	7, 1, (2)
12	3, (2)	61	7, 1, 4, 3, 1, 2
13	3, 1, 1	62	7, 1, (6)
14	3, 1, (2)	63	7, (1)
15	3, (1)	65	8
17	4	66	8, (8)
18	4, (4)	67	8, 5, 2, 1, 1, (7)
19	4, 2, 1, (3)	68	8, (4)
20	4, (2)	69	8, 3, 3, 1, (4)
21	4, 1, 1, (2)	70	8, 2, 1, (2)
22	4, 1, 2, (4)	71	8, 2, 2, 1, (7)
23	4, 1, (3)	72	8, (2)
24	4, (1)	73	8, 1, 1, 5
26	5	74	8, 1, 1
27	5, (5)	75	8, 1, (1)
28	5, 3, (2)	76	8, 1, 2, 1, 1, 5, (4)
29	5, 2, 1	77	8, 1, 3, (2)
30	5, (2)	78	8, 1, (4)
31	5, 1, 1, 3, (5)	79	8, 1, (7)
32	5, 1, (1)	80	8, (1)
33	5, 1, (2)	82	9
34	5, 1, (4)	83	9, (9)
35	5, (1)	84	9, (6)
37	6	85	9, 4, 1
38	6, (6)	86	9, 3, 1, 1, 1, (8)
39	6, (4)	87	9, (3)
40	6, (3)	88	9, 2, 1, (1)
41	6, 2	89	9, 2, 3
42	6, (2)	90	9, (2)
43	6, 1, 1, 3, 1, (5)	91	9, 1, 1, 5, (1)
44	6, 1, 1, 1, (2)	92	9, 1, 1, 2, (4)
45	6, 1, 2, (2)	93	9, 1, 1, 1, 4, (6)
46	6, 1, 3, 1, 1, 2, (6)	94	9, 1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, (8)
47	6, 1, (5)	95	9, 1, (2)
48	6, (1)	96	9, 1, (3)
50	7	97	9, 1, 5, 1, 1, 1
51	7, (7)	98	9, 1, (8)
52	7, 4, 1, (2)	99	9, (1)

¹²Tabelle aus [Per77] §26 Seite 91.

Literatur

- [BurDal01] H. DALKOWSKI, D. M. BURTON: Handbuch der elementaren Zahlentheorie mit 1000 Übungsaufgaben und ihren Lösungen,
<http://www.heldermann.de/Ebooks/ebook2.htm>, E-Book, Volume 2, 2001.
- [Bur98] D.M. BURTON: Elementary Number Theory,
Fourth Edition. McGraw-Hill Higher Education, Boston, 1998.
- [Olds63] C.D. OLDS: Continued Fractions,
New Mathematics Library, Mathematical Association of America, 1963.
- [Per39] O. PERRON: Irrationalzahlen.
2te Auflage, Verlag Walter & Gruyter & Co, Berlin 1939.
- [Per77] O. PERRON: Die Lehre der Kettenbrüche,
Teuber-Verlag, Stuttgart 1977.
- [RoSz92] A.M. ROCKETT, P. SZUSZ: Continued Fractions
World Scientific Pub. Co. Inc, 1992
- [Ros84] KENNETH H. ROSEN: Elementary Number Theory and its Applications,
Addison Wesley, Massachusetts 1984.
- [Wik] WIKIPEDIA ENZYKLOPÄDIE: <http://de.wikipedia.org/wiki/Kettenbruch>,
http://de.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens
- [Wol] WOLFRAM RESEARCH: Mathematica Documentation,
<http://www.wolfram.com>.
- [Zip93] R. ZIPPEL: Effective Polynomial Computation (Number Theory 'Continued Fractions'),
Kluwer, Boston 1993.

Ich versichere hiermit, das ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Stefan SCHEEL