3 Funktionen und Graphen

3.1 Reelle Funktionen und ihre Graphen

Definition 3.1 (Reelle Funktionen) Eine *reelle Funktion* f ist eine Regel, die den reellen Zahlen $x \in D$ des *Definitionsbereichs* $D \subset \mathbb{R}$ jeweils eine reelle Zahl $f(x)$ zuordnet. Die Zahl $f(x)$ heißt der *Wert*[1] *von* f an der Stelle x oder das *Bild*[2] von x unter der Funktion f. Entsprechend heißt x ein *Urbild*[3] des Punktes $f(x)$. Wir schreiben in dieser Situation auch $x \mapsto f(x)$. Beim Ausdruck $f(x)$ sagen wir manchmal auch, daß x das *Argument* dieses Funktionsaufrufs sei. Die Menge aller Werte von f

$$f(D) := \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in D\}$$

heißt der *Wertebereich* oder auch *Bild*[4] von f. Wir nennen x die *unabhängige Variable* von f. Häufig ist der Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ von f ein Intervall oder ganz $\mathbb{R}$. Um den Definitionsbereich einer Funktion zu spezifizieren, verwenden wir die ausführlichere Schreibweise $f : D \to \mathbb{R}$ oder auch

$$f : \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array} .$$

Beispiel 3.1 Die Betragsfunktion

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.22}$$

und die Vorzeichenfunktion

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} , \tag{1.23}$$

die wir in Kapitel 1 definiert haben, stellen Beispiele von Funktionen dar, die in ganz $\mathbb{R}$ erklärt sind. Auch die Quadratfunktion $\operatorname{sqr}(x) := x^2$ und die Quadratwurzelfunktion $\operatorname{sqrt}(x) := \sqrt{x}$ sind reelle Funktionen. Man beachte jedoch, daß letztere Funktion nur für nichtnegative x-Werte definiert ist. Der Definitionsbereich der Wurzelfunktion ist also $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$ und nicht $\mathbb{R}$. △

[1] Englisch: value
[2] Englisch: image
[3] Englisch: preimage
[4] Englisch: range

Man kann eine reelle Funktion f mit Hilfe eines x-y-Koordinatensystems graphisch darstellen. Dazu zeichnet man das Bild der Punkte

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x)\right\} .$$

Diese ebene Menge heißt der *Graph* von f. Es folgen die Graphen der Betragsfunktion, der Vorzeichenfunktion sowie der Quadrat- und der Wurzelfunktion.

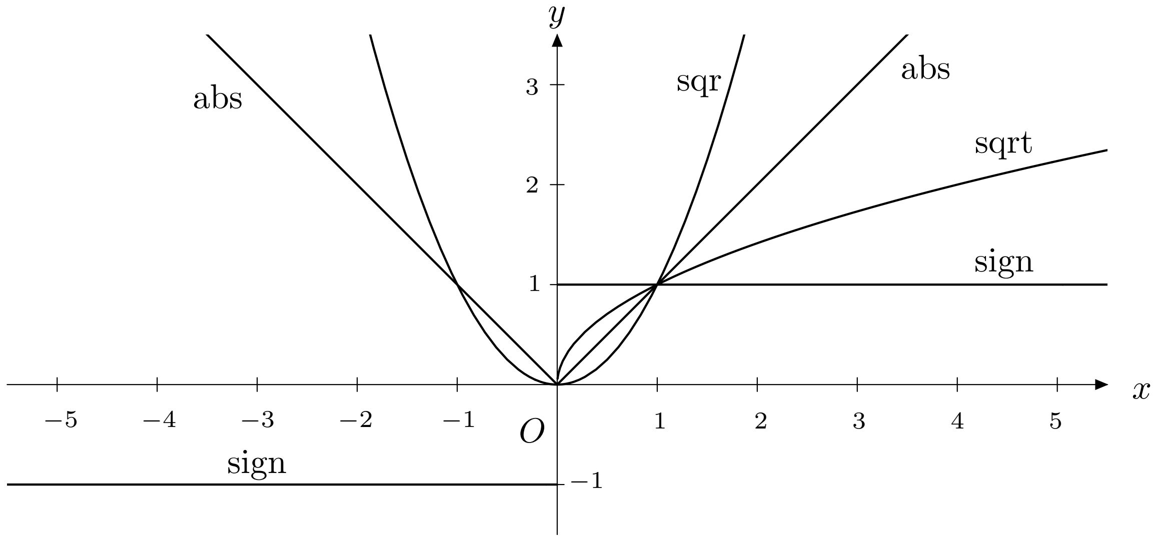

Abbildung 3.1 Einige Beispielgraphen reeller Funktionen

DERIVE-Sitzung 13.5 gibt eine Anleitung, wie man DERIVE zur graphischen Darstellung benutzen kann.

Das Beispiel der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1 , \tag{3.1}$$

die für jedes $x \in (-1,1)$ zwei Lösungen y hat, zeigt, daß eine Gleichung mit zwei Variablen x und y nicht einer Funktion $x \mapsto y(x)$ entsprechen muß. Jede Gleichung E, die wie Gleichung (1.1) die Variablen x und y miteinander in Verbindung setzt, heißt *implizite Funktion*. Die graphische Darstellung einer impliziten Funktion erhält man durch Darstellung der Menge[5]

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; E \text{ ist wahr}\right\} .$$

Nur wenn die Gleichung eine *eindeutige Lösung* $y(x)$ besitzt und damit eindeutig nach y *aufgelöst*[6] werden kann, ist eine implizite Funktion tatsächlich eine Funktion – denn eine Funktion muß definitionsgemäß für jedes x aus ihrem Definitionsbereich genau einen Wert $y(x)$ besitzen. Auch wenn diese Eigenschaft für alle Zahlen x in einem bestimmten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt, so heißt das noch lange nicht, daß wir tatsächlich eine *explizite Formel* $y(x)$ angeben können.

[5] Man kann zumindest *prinzipiell* zu so einer graphischen Darstellung gelangen; es ist jedoch oft schwer, die Werte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ zu bestimmen, für die die Gleichung E gilt.

[6] Die Auflösbarkeit ist somit gleichwertig mit der Existenz einer eindeutigen Lösung und nicht mit der Existenz einer Formel für diese Lösung.

Graphisch betrachtet bedeutet die Tatsache, daß man die Gleichung an einer Stelle x_0 nach y auflösen kann, daß die Parallele zur y-Achse, die durch x_0 geht, den zugehörigen Graphen genau einmal schneidet.

Übungsaufgaben

3.1 *Gib eine explizite Darstellung der impliziten Funktion*

$$\Big||x| + |y-3| - 3\Big| = 1 \ .$$

3.2 *Zeige: Ersetzt man x durch x/a für ein $a > 0$ in der impliziten Funktionsgleichung*

$$F(x,y) = 0 \tag{3.2}$$

(wobei F eine beliebige Funktion der beiden Variablen x und y ist), so ändert sich die Skalierung in x-Richtung um den Faktor a, so daß der Graph von Gleichung (1.2) in Richtung der x-Achse um den Faktor a gedehnt oder (falls $a < 1$) gestaucht wird. Ersetzen wir y in Gleichung (1.2) durch y/b ($b > 0$), so wird der Skalierungsfaktor in y-Richtung um den Faktor b vergrößert oder verkleinert, und der Graph in y-Richtung gedehnt oder gestaucht. (Genau diese Substitutionen werden im `Scale` *und im* `Zoom` *Befehl bei* DERIVE *durchgeführt.)*

Stelle die Einheitskreislinie mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ graphisch dar. Benutze den `Zoom` *Befehl, um die Skalierung einer der Achsen zu ändern. Wie sieht das Bild nun aus?*

◇ **3.3** *Zeige mit quadratischer Ergänzung (s. Umformung von Gleichung (1.10)), daß der Graph einer Gleichung der Form*

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0 \tag{3.3}$$

immer ein Kreis ist oder so degeneriert, daß es keinen reellen Graphen gibt. Zeige, daß der Radius r dieses Kreises durch $r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ gegeben ist. Prüfe nach, ob folgende Gleichungen einem Kreis entsprechen, berechne ihren Mittelpunkt und Radius und stelle die Funktionen mit DERIVE *graphisch dar.*

(a) $x^2 + x + y^2 + y = 0$,
(b) $2x^2 - x + 2y^2 - 2y - 3 = 0$,
(c) $x^2 + 4x + y^2 - 4y - 3 = 0$,
(d) $3x^2 - 20x + 3y^2 - 4y + 3 = 0$,
(e) $x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 0$,
(f) $x^2 - kx + y^2 + 2y = 0$ ($k = 0, \ldots, 5$) .

◇ **3.4** *Der Graph der impliziten Gleichung*

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

ist ein gedehnter Kreis, eine sog. Ellipse. Stelle die Ellipsen für $b := 1$ und die Werte $a := 1/2, 1, 2,$ und 3 graphisch dar.

3.5 *Konstruiere entsprechend Gleichung (1.3) die Gleichung einer allgemeinen Ellipse, die durch Verschiebung in x- und y-Richtung entsteht.*

◇ **3.6** *Betrachte die implizite Funktion, die durch die Gleichung*

$$y^3 - 3y - x = 0 \tag{3.4}$$

definiert wird und die Gleichung

$$y(0) = 0$$

erfüllt. Die Gleichung (1.4) kann man leicht explizit nach x auflösen. Stelle den entsprechenden Graphen mit DERIVE *dar. Man beachte, daß nun die y-Achse nach rechts, und die x-Achse nach oben zeigt. Wie würde der Graph in einem gewöhnlichen x-y-Koordinatensystem aussehen?*
Lasse DERIVE *die Gleichung (1.4) nach y auflösen.* DERIVE *kann alle Gleichungen dritten Grades[7] (und einige vierten Grades) lösen[8]. Die Ausgabe ist jedoch im allgemeinen zu unübersichtlich und daher nicht von großem Interesse. Im vorliegenden Fall ist dies jedoch nicht so. Es macht nichts, wenn die Ausgabe im Augenblick nicht verstanden wird. Sie wird später verständlich werden. Man kann jedoch $y(x)$ graphisch darstellen. Dazu muß man diejenige Lösung finden, die der Bedingung $y(0) = 0$ genügt. Stelle alle drei Lösungen graphisch dar und achte darauf, wie diese ineinander übergehen.*
Wie sieht der größtmögliche Definitionsbereich der betrachteten impliziten Funktion aus?

3.2 Lineare Funktionen und Geraden

Jede Gleichung der Form

$$Ax + By = C \qquad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

stellt eine Gerade L in $\mathbb{R}^2$ dar. Gilt $B \neq 0$, dann ist diese Gleichung nach y auflösbar und man erhält

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B} =: mx + b\ . \tag{3.5}$$

Für $-\frac{A}{B}$ schreibt man meist m. Diese Zahl heißt *Steigung*[9] der Geraden L. Die Zahl $b := \frac{C}{B}$ ist der *y-Achsenabschnitt* von L. Denn für $x = 0$ erhalten wir gerade $y = b$, so daß L die y-Achse im Punkt $(0, b)$ schneidet. Was ist aber die geometrische Bedeutung der Steigung? Vergrößern wir den Wert von x um 1, so entspricht die

[7] Der Grad eines Polynoms wird in § 1.3 erklärt.
[8] Solange der Speicherplatz ausreicht.
[9] Englisch: slope

Änderung des y-Wertes der Differenz der y-Werte an der Stelle $x+1$ und der Stelle x:[10]

$$y(x+1) - y(x) = \Big(m(x+1) + b\Big) - (mx + b) = m \; .$$

Dies gibt der Steigung m eine Bedeutung: Sie ist gleich der Veränderung in Richtung der y-Achse, wenn x um 1 vergrößert wird. Wir betrachten nun eine beliebige Änderung des x-Wertes. Eine solche Änderung auf der x-Achse wird oft mit Δx bezeichnet[11], während die entsprechende Änderung auf der y-Achse durch

$$\Delta y := y(x + \Delta x) - y(x)$$

berechnet werden kann. Bei unserer Geradengleichung folgt nun

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \Big(m(x + \Delta x) + b\Big) - (mx + b) = m \cdot \Delta x \; ,$$

so daß die Steigung m in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ dem Verhältnis $\Delta y / \Delta x$ entspricht, s. Abbildung 1.2.

Die Darstellung (1.5) der Geradengleichung heißt *Steigungs-Achsenabschnitts-Form*. Dies ist die wichtigste Art der Darstellung, da hier die Geradengleichung nach y aufgelöst ist und deshalb die Gerade mit einer Funktion

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) := y = mx + b \end{array}$$

in Verbindung steht. Eine derartige Funktion heißt *lineare Funktion*.

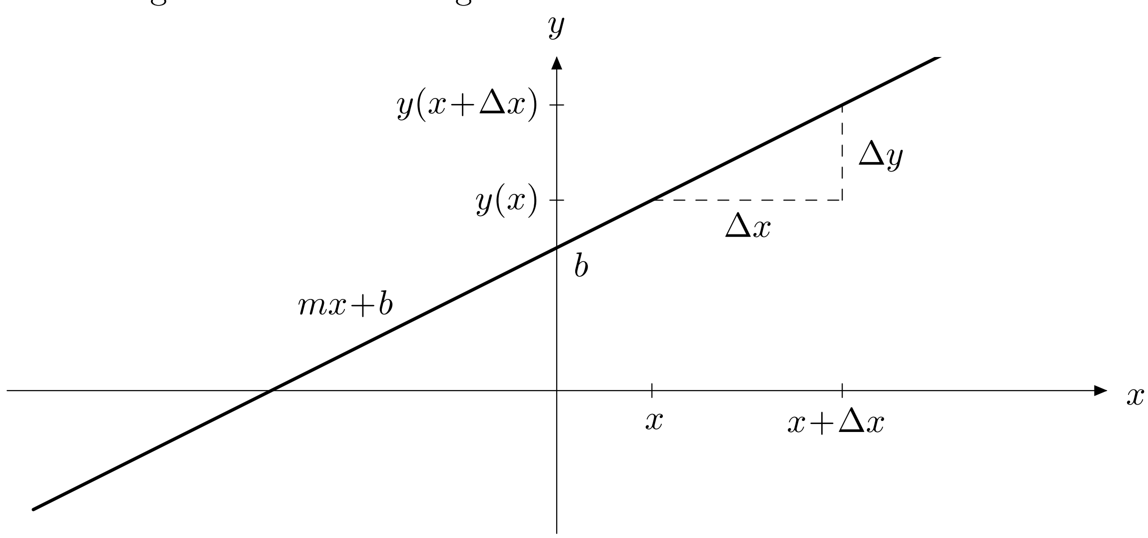

Abbildung 3.2 Die Steigung einer linearen Funktion

Wir wollen nun die Gleichung für eine Gerade aufstellen, die durch zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$ geht. In diesem Fall gilt offensichtlich

[10] Man beachte, daß $y(x+1)$ auf der linken Seite den Funktionswert von y an der Stelle $x+1$ bezeichnet, während $m(x+1)$ im mittleren Ausdruck das Produkt der Zahlen m und $x+1$ ist.

[11] Der griechische Buchstabe Δ („Delta") entspricht dem D des Wortes Differenz.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \,, \tag{3.6}$$

so daß diese Zahl der Steigung m entspricht. Wir berechnen weiter den y-Achsenabschnitt b. Dazu beachte man, daß aus der Gleichung

$$y_1 = mx_1 + b$$

folgt, daß gilt

$$b = y_1 - mx_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \,. \tag{3.7}$$

Wir wollen jedoch noch andere Darstellungen für die Geradengleichung angeben, die man sich leichter merken kann. Da die Steigung m für alle Punkte $P = (x, y)$ gleich ist, erhalten wir nämlich

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \,. \tag{3.8}$$

Die linke Gleichung der Gleichungskette (1.8) heißt *Punkt-Steigungs-Form*, während die rechte Gleichung von (1.8) *Zwei-Punkte-Form* der Geradengleichung genannt wird.

Sitzung 3.1 Die Steigung und den y-Achsenabschnitt der Geraden durch die Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ erhält man durch Auflösen der beiden Gleichungen

$$y_1 = mx_1 + b$$

und

$$y_2 = mx_2 + b$$

nach b und m. Wir führen dies mit DERIVE durch. Man ändere dazu den Eingabemodus mit Hilfe des `Options Input Word` Befehls von `Character` (Buchstabeneingabe) in `Word` (Worteingabe), um mehrbuchstabige Variablennamen wie `y1` eingeben zu können. Man gebe dann den Vektor `[y1 = m x1 + b, y2 = m x2 + b]` ein und löse diese Gleichungen mit Hilfe des `soLve` Befehls nach b und m auf. Man bekommt erneut (1.6)–(1.7).

Man definiere weiter die DERIVE Funktion

```
ZWEIPUNKTEFORM(x,x1,y1,x2,y2) := (y2-y1)/(x2-x1)*x+(y1 x2-y2 x1)/(x2-x1)
```

deren Wert der rechten Seite der Geradengleichung durch die Punkte P_1 und P_2 entspricht (s. Gleichungen (1.6) und (1.7)).

Berechne die rechten Seiten der Geradengleichungen für die Gerade durch $(1, 0)$ und $(0, 1)$ und für die Gerade durch $(0, 0)$ und $(1, 1)$ mit der Funktion `ZWEIPUNKTEFORM`, und stelle alle drei Geraden graphisch dar!

Man stelle zuletzt die Gerade mit der Steigung $m := 1$ und dem y-Achsenabschnitt $b := -1$ graphisch dar.

Man sieht, daß zwei der Geraden *parallel* sind und daß sie *senkrecht* (*orthogonal*) auf der dritten Geraden stehen[12]. Was charakterisiert diese Eigenschaften?

Addiert man zu einer beliebigen Gleichung $y = f(x)$ eine Zahl y_0, so *verschiebt* sich der Graph von f in y-Richtung um y_0 Einheiten, da für alle x der Funktionswert $f(x) + y_0$ gerade um diesen Summanden größer als $f(x)$ ist. Deshalb sind zwei Geraden (von denen keine parallel zur y-Achse verlaufe) genau dann *parallel*, wenn sie die gleiche Steigung haben, oder – äquivalent ausgedrückt – wenn die zugehörigen Funktionen sich um eine bestimmte Konstante unterscheiden.

Eine Parallelverschiebung zeigt, daß die Orthogonalität zweier Geraden nicht von ihrem y-Achsenabschnitt abhängt. Zwei Geraden (von denen keine parallel zur y-Achse verlaufe)

$$L_1 : \quad y = m_1 x \qquad \text{bzw.} \qquad L_2 : \quad y = m_2 x$$

stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn L_2 aus L_1 erzeugt werden kann, indem man die x-Richtung von L_1 zur y-Richtung von L_2 und die y-Richtung von L_1 zur negativen x-Richtung von L_2 macht (man mache sich klar, was das geometrisch bedeutet!). Das heißt, wir müssen in der Gleichung von L_1 gleichzeitig x durch y und y durch $-x$ ersetzen, um die Gleichung von L_2 zu erhalten:

$$-x = m_1 y \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{m_1} x = m_2 x \ .$$

Da die rechte Gleichung nun die von L_2 sein soll, folgt die Beziehung $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Gilt umgekehrt diese Beziehung, dann sind L_1 und L_2 orthogonal, wie man durch eine ähnliche Betrachtung sieht.

Übungsaufgaben

◇ **3.7** *Schreibe eine* Derive *Funktion* `PUNKTSTEIGUNGSFORM(x,m,x1,y1)`, *die die rechte Seite der Gleichung der Geraden durch den Punkt* (x_1, y_1) *mit der Steigung* m *erzeugt. Überprüfe die Funktion und stelle die Parallelen mit Steigung* 2 *durch die Punkte* $(0, k)$, $(k = -4, -3, \ldots, 4)$ *sowie ihre Orthogonaltrajektorien*[13] *durch die Punkte* $(k, 0)$, $(k = -4, -3, \ldots, 4)$ *mit* Derive *graphisch dar. Man verwende dazu die* `VECTOR` *Funktion.*

3.3 Reelle Polynome

Der Ausdruck

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (a_k \in \mathbb{R} \quad (k = 0, \ldots, n))$$

[12] Wenn, wie im Anhang (Kapitel 13) beschrieben, die $\boxed{\texttt{Ticks}}$ von Derive richtig eingestellt sind.

[13] Damit werden die auf den gegebenen Geraden senkrecht stehenden Geraden bezeichnet.

(wir verwenden weiterhin die Konvention $x^0 = 1$) heißt *reelles Polynom* bzgl. der Variablen x. Der höchste Exponent n heißt *Grad*[14] des Polynoms, und wir schreiben $\deg p = n$. Ein Polynom vom Grad 1 ist eine lineare Funktion. Ein Polynom vom Grad 2 nennen wir *quadratisch*, während ein Polynom vom Grad 3 *kubisch* genannt wird. Entsprechend unserer Vereinbarung ist eine konstante Funktion ein Polynom vom Grad 0. Die Zahl $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, \ldots, n)$ heißt der k. *Koeffizient* des Polynoms. Zwei Polynome stimmen offensichtlich nur dann überein, wenn alle ihre Koeffizienten gleich sind.

Wir wollen uns zunächst mit quadratischen Funktionen beschäftigen. Die einfachste Funktion dieses Typs ist die Quadratfunktion

$$f(x) = x^2 \, , \tag{3.9}$$

die wir schon in Abbildung 1.1 auf S. 2 graphisch dargestellt hatten.

> **Sitzung 3.2** Wir wollen die graphische Darstellung quadratischer Funktionen genauer betrachten. Stelle die Gleichung (1.9) mit DERIVE graphisch dar. Der Graph heißt *Parabel*. Den Ursprung nennt man den *Scheitel* der Parabel. Wie sehen die Graphen anderer quadratischer Funktionen aus? Man betrachte mit Hilfe der `VECTOR` Funktion $y = k\,x^2$ sowie $y = k\frac{x^2}{3} - (k+1)x - 1$ jeweils für $k = -4, -3, \ldots, 4$ (man vereinfache die Vektoren zuerst mit `Simplify` !).

Betrachtet man die Graphen einiger quadratischer Funktionen, so stellt man fest, daß sie alle sehr ähnlich aussehen, nämlich wie eine Parabel, deren Scheitel verschoben worden ist, und deren Öffnung entweder in Richtung der positiven oder der negativen y-Achse zeigt. Können wir dies beweisen? Die allgemeine quadratische Funktion hat die Form $(a, b, c \in \mathbb{R})$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \, . \tag{3.10}$$

Wir führen folgende Umformung durch und benutzen dabei die *quadratische Ergänzung*[15]

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \, . \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß der Graph von f dem von $y = ax^2$ entspricht, wobei der Scheitel um $-\frac{b}{2a}$ in x-Richtung und um $c - \frac{b^2}{4a}$ in y-Richtung verschoben wurde. Dies folgt aus der Tatsache, daß eine Ersetzung von x durch $x - B$ in der Gleichung $y = f(x)$ (mit einer Konstanten $B \in \mathbb{R}$) dazu führt, daß sich der x-Wert der Gleichung um B Einheiten nach links und damit der Graph um denselben Betrag nach rechts verschiebt.

[14] Englisch: degree

[15] Die quadratische Ergänzung wird auch zur Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung verwendet. Englisch: completion

Was haben die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.11}$$

mit der zugehörigen Parabel zu tun? Offensichtlich repräsentiert Gleichung (1.11) alle Zahlen x mit $f(x) = 0$ in Gleichung (1.10). Geometrisch bedeutet dies, daß die Lösungen der Gleichung (1.11) diejenigen Zahlen x sind, für die die Parabel (1.10) den y-Wert 0 hat und deshalb die x-Achse schneidet.

Sitzung 3.3 Wir wollen mit DERIVE ein Beispiel dieser Art vorstellen. Man definiere $y = x^2 - x - 3/4$ und stelle den Graphen dieser Funktion dar. Man schätze, wo die Nullstellen liegen, löse die entsprechende quadratische Gleichung $y = 0$ und vergleiche.

Polynome mit einem Grad n, der größer als 2 ist, sind auf ähnliche Weise mit dem *Monom* $p(x) = x^n$ verbunden.

Sitzung 3.4 Stelle die ersten zehn Monome `VECTOR(x^n,n,1,10)` graphisch dar[16]. Wie man sieht, steigt das Wachstum für $x > 1$ mit dem Grad an. Die Werte von x^n sind für negative x positiv, wenn n gerade ist, und negativ für ungerade n. Für ungerade n sind die Graphen symmetrisch zum Ursprung, während sie für gerade n symmetrisch zur y-Achse sind. Die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$ liegen auf den Graphen aller Monome.

Die erwähnten Symmetrieeigenschaften von Monomen können leicht nachgewiesen werden. Man beachte, daß zwei ebene Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) genau dann symmetrisch zum Ursprung sind, wenn $x_2 = -x_1$ und $y_2 = -y_1$ gilt, so daß der Graph einer Funktion f genau dann symmetrisch zum Ursprung ist, wenn gilt

$$f(-x) = -f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) . \tag{3.12}$$

Weiterhin sind zwei ebene Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn $x_2 = -x_1$ und $y_2 = y_1$ gilt, so daß der Graph einer Funktion f genau dann symmetrisch zur y-Achse ist, wenn gilt

$$f(-x) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) . \tag{3.13}$$

Für das Monom $p(x) = x^n$ erhalten wir

$$p(-x) = (-x)^n = (-1)^n \cdot x^n = -x^n = -p(x) ,$$

falls n ungerade ist und

$$p(-x) = (-x)^n = (-1)^n \cdot x^n = x^n = p(x) ,$$

falls n gerade ist. Dies liegt an der Beziehung

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases} \tag{3.14}$$

[16] Wer einen langsamen Rechner hat, sollte nur die ersten 5 Monome graphisch darstellen, da die Ausgabe sonst sehr lange dauern kann.

(s. Übungsaufgabe 1.9). Wir nennen deshalb Funktionen mit der Eigenschaft (1.12) *ungerade Funktionen*[17] und Funktionen mit der Eigenschaft (1.13) *gerade Funktionen*[18]. Wir wollen erwähnen, daß man jede beliebige Funktion f (die in einem zum Ursprung symmetrischen Intervall I definiert ist, z. B. $I = \mathbb{R}$) auf genau eine Weise in eine Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion zerlegen kann, s. Übungsaufgabe 1.10. Diese Funktionen werden der *gerade* bzw. der *ungerade Anteil* von f genannt und sind wie folgt definiert:

$$f_{\text{gerade}} := \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{und} \qquad f_{\text{ungerade}} := \frac{f(x)-f(-x)}{2} \,. \tag{3.15}$$

Diese Konstruktion wird später z. B. dazu benutzt werden, die hyperbolischen Funktionen zu erklären.

Sitzung 3.5 DERIVE kann Polynome in zwei Standardformate umformen. Dies geschieht mit Hilfe der Menüs `Expand` und `Factor`. Definiere den Ausdruck `PRODUCT(x-1/k,k,1,10)`. Dies ist die faktorisierte Form eines Polynoms, an der man sofort die *Nullstellen*[19] ablesen kann, d. h. diejenigen Punkte, an denen das Polynom verschwindet bzw. den Wert Null hat. Expandiere nun den Ausdruck mit dem `Expand` Menü. Die expandierte Form eines Polynoms ist die Form, bei der alle Faktoren mit Hilfe des Distributivgesetzes ausmultipliziert worden sind. Faktorisiere das Ergebnis mit dem Befehl `Factor Rational` wieder zurück. DERIVE findet alle Faktoren $(x-a)$ mit rationalem[20] a. In bestimmten Fällen findet DERIVE auch irrationale und komplexe Faktoren. Um jedoch nicht unnötig Rechenzeit zu verschwenden, empfiehlt es sich, zuerst die rationale Faktorisierung zu verwenden. Nur wenn diese erfolglos bleibt, sollte man statt dessen auf die Faktorisierung mit `raDical` oder `Complex` ausweichen. Bei unserem Beispiel funktioniert die rationale Faktorisierung, obwohl auch diese einige Zeit benötigt. Man beachte, daß die Faktorisierung von Polynomen für gewöhnlich sehr zeitaufwendig ist[21].

Am Ende diese Abschnitts wollen wir einige zentrale algebraische Eigenschaften von Polynomen behandeln.

Satz 3.1 (Abdividieren von Nullstellen) Ist x_0 eine Nullstelle des Polynoms $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, dann ist $p(x)/(x-x_0)$ ein Polynom vom Grad $n-1$.

Beweis: Zum Beweis dieses Satzes benutzen wir die Identität

$$x^k - x_0^k = (x-x_0)\left(x^{k-1} + x_0 x^{k-2} + \cdots + x_0^{k-2}x + x_0^{k-1}\right) = (x-x_0)q_{k-1}(x) \,, \tag{3.16}$$

die für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt, siehe Übungsaufgabe 1.22. Hierbei stellt q_j offenbar ein Polynom vom Grad j bzgl. der Variablen x dar.

Ist nun x_0 eine Nullstelle von p, so folgt unter Verwendung von (1.16)

[17] Englisch: odd functions
[18] Englisch: even functions
[19] Englisch: zero
[20] Allerdings kann a symbolisch sein.
[21] Das ist nicht verwunderlich: Man versuche einmal, die gegebene expandierte Formel von Hand zu faktorisieren!

$$\begin{aligned} p(x) = p(x) - p(x_0) &= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) - (a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n) \\ &= (x - x_0)\left(a_1 + a_2 q_1(x) + a_3 q_2(x) + \cdots + a_n q_{n-1}(x)\right) \\ &= (x - x_0) q(x)\ , \end{aligned}$$

wobei q ein Polynom vom Grad $n-1$ ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Als sofortige Folgerung (Induktion!) haben wir[22]

Korollar 3.1 Ein nichtverschwindendes Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen. □

Eine weitere wichtige Folge ist der sogenannte *Identitätssatz für Polynome.*

Korollar 3.2 (Identitätssatz) Zwei Polynome $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ und $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ vom Grad n, die an $n+1$ verschiedenen Stellen den gleichen Wert annehmen, sind identisch, d. h. $a_k = b_k$ $(k = 0, \ldots, n)$, und stimmen somit sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ überein.

Beweis: Die Funktion $p - q$ ist offenbar ein Polynom mit $\deg(p - q) \leq n$. Da p und q an $n+1$ Stellen übereinstimmen, hat $p - q$ andererseits mindestens $n+1$ Nullstellen. Aus Korollar 1.1 folgt dann, daß $p - q$ das Nullpolynom ist. □

Übungsaufgaben

◇ **3.8** *Sei $f(x) = x^2 - x - 3/4$. In* Derive*-Sitzung* 1.3 *wurde der Graph dieser Funktion dargestellt und die entsprechende quadratische Gleichung $f(x) = 0$ gelöst. Bestimme anhand des Graphen, für welche Werte von x die Ungleichungen $f(x) < 0$ und $f(x) > 0$ gelten. Kann man diese Ungleichungen auch mit* Derive *lösen*[23]*.*

3.9 *Beweise Gleichung* (1.14) *durch Induktion.*

∘ **3.10** *Zeige, daß für jede Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ eines zum Ursprung symmetrischen Intervalls I genau eine gerade Funktion f_{gerade} sowie eine ungerade Funktion f_{ungerade} existiert, für die die Beziehung $f = f_{\text{gerade}} + f_{\text{ungerade}}$ gilt. Diese sind durch* (1.15) *gegeben.*

3.11 *Bestimme für ein allgemeines Polynom $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ vom Grad n die Zerlegung in geraden und ungeraden Anteil.*

3.12 *Untersuche die Summen, die Differenz, das Produkt und den Quotienten gerader und ungerader Funktionen. Welche Symmetrie haben die resultierenden Funktionen?*

3.13 *Zeige, daß die Funktion*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k$$

gerade ist.

[22] Ein *Korollar* ist eine Folgerung aus einem Satz.

[23] Die Antwort auf diese Frage hängt von der Version von Derive ab.

◇ **3.14** *Stelle mit* DERIVE *die Funktion* $f(x) := x(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$ *graphisch dar. Welche Symmetrie besitzt* f*? Wie kann man die Symmetrie der Definition von* f *bzw. der ausmultiplizierten Form ansehen? Die Nullstellen von* f *sind offensichtlich* $-2, -1, 0, 1$ *und* 2*. Wo scheint das lokale Maximum und das lokale Minimum von* f *zu liegen? Finde Näherungswerte für den* x*- und den* y*-Wert dieser Stellen. (An späterer Stelle können wir beweisen, daß das positive lokale Maximum an der Stelle* $x = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{145}}{10}} = 0.54391225590233803076...$ *und das positive lokale Minimum an der Stelle* $x = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{145}}{10}} = 1.64443286815826858429...$ *liegen.)*

3.15 *Beweise durch quadratische Ergänzung, daß die Lösungsformel für quadratische Gleichungen aus* DERIVE*-Sitzung* 1.6 *richtig ist.*

◇ **3.16** *Bestimme mit Hilfe von* DERIVE *die Koeffizienten* a, b *und* c *der allgemeinen Parabel* $ax^2 + bx + c$*, die durch die Punkte* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *und* (x_3, y_3) *geht. Verwende das Ergebnis, um die Parabeln zu ermitteln, deren Graph durch folgende Punkte geht:*

(a) $(-1, 1),\ (0, 0)$ *und* $(1, 1)$, (b) $(-1, 0),\ (0, 0)$ *und* $(1, 1)$,

(c) $(-1, -1),\ (0, 0)$ *und* $(1, 1)$, (d) $(0, 0), (k, 0)$ *und* $(1, 1)$ $(k \in \mathbb{R}\backslash\{1\})$.

Man stelle die Lösungsfunktionen graphisch dar, bei (d) *für* $k = -4, -3, \ldots, 4$*. Was geschieht für* $k = 1$*?*

3.4 Polynominterpolation

In Anwendungsfällen haben wir für eine gesuchte reelle Funktion oft keine Funktionsgleichung, sondern nur einige (oder auch viele) Meßwerte – sagen wir n Stück. Wollen wir nun zu Werten kommen, die wir nicht gemessen haben (wir können ja nur eine endliche Zahl von Werten messen), so können wir den Graphen der gemessenen Punkte durch den Graphen eines Polynoms verbinden. Diese Art der Näherung heißt *Polynominterpolation*. Wir wissen aus Korollar 1.2, daß ein Polynom vom Grad n–1 durch n Punkte auf seinem Graphen eindeutig festgelegt wird. Es gibt zu obigem Problem also genau eine Lösung, wenn wir den Grad des Polynoms durch $n - 1$ beschränken.

Abbildung 1.3 zeigt ein Beispiel für eine solche Situation. Hier ist das *Interpolationspolynom* für die *Interpolationsdaten* $\{(-2, 0), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 0)\}$ dargestellt. Die allgemeine Lösung dieses Interpolationsproblems kann man leicht hinschreiben und in eine DERIVE Funktion überführen. Wir verwenden dafür bestimmte Produkte, die sog. *Lagrangeschen*[24] *Polynome*.

[24] JOSEPH LOUIS LAGRANGE [1736–1813]

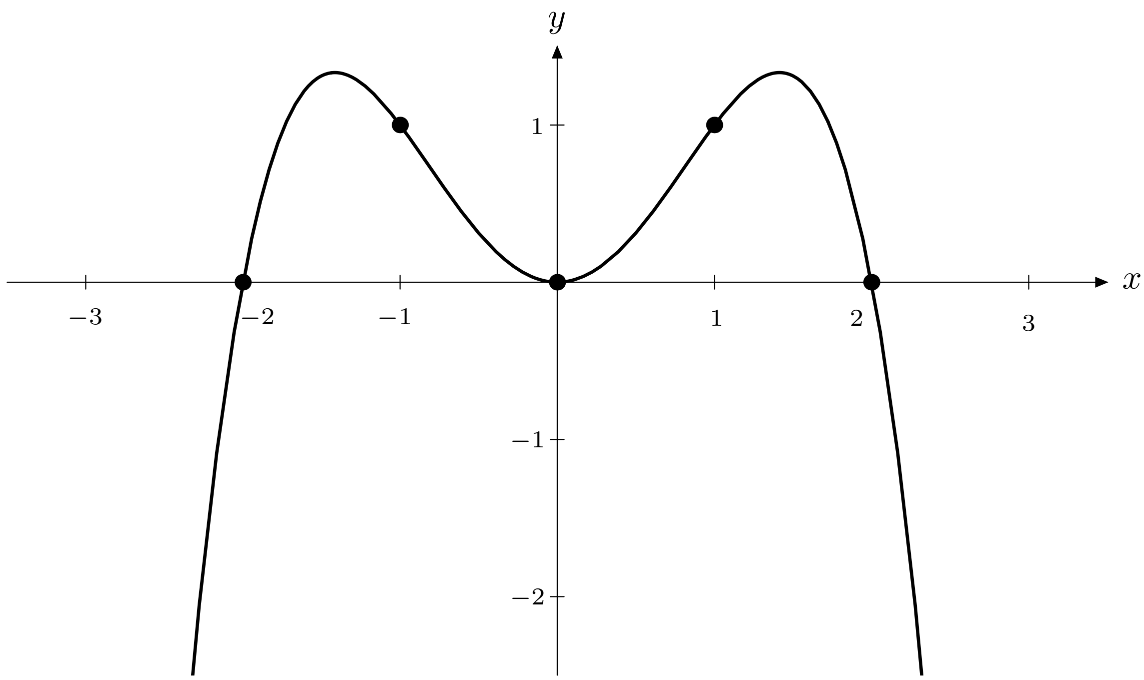

Abbildung 3.3 Interpolationspolynom für $\{(-2,0),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,0)\}$

Es seien die Werte y_k an den Stellen x_k $(k=1,\dots,n)$ gegeben, oder m. a. W. die Punkte (x_k,y_k) $(k=1,\dots,n)$ des Graphen. Wir sehen, daß die Lagrangeschen Polynome

$$L_k(x) := \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})}\,\frac{(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_{k+1})(x_k-x_{k+2})\cdots(x_k-x_n)}$$

den Grad $n-1$ haben und die Werte

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j=k \\ 0 & \text{falls } j\neq k \end{cases}$$

an den *Stützstellen* x_j $(j=1,\dots,n)$ annehmen. Also löst das Polynom

$$L(x) := y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + \cdots + y_nL_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_kL_k(x) \tag{3.17}$$

das gegebene Problem, da ein direkter Vergleich zeigt, daß

$$L(x_j) := y_1L_1(x_j) + y_2L_2(x_j) + \cdots + y_nL_n(x_j) = y_j$$

für alle $j=1,\dots,n$ gilt. Diese nach obiger Bemerkung eindeutige Lösung des gegebenen Interpolationsproblems heißt *Lagrangesches Interpolationspolynom* und wird ausführlich in § 12.4 betrachtet werden.

Sitzung 3.6 Wir definieren die DERIVE Funktion `LAGRANGE(a,x)` durch[25]

```
LAGRANGE_AUX(a,x,k,n):=
PRODUCT((x-ELEMENT(a,j_,1))/(ELEMENT(a,k,1)-ELEMENT(a,j_,1)),j_,1,k-1)*
PRODUCT((x-ELEMENT(a,j_,1))/(ELEMENT(a,k,1)-ELEMENT(a,j_,1)),j_,k+1,n)

LAGRANGE(a,x):=
SUM(ELEMENT(a,k_,2)*LAGRANGE_AUX(a,x,k_,DIMENSION(a)),k_,1,DIMENSION(a))
```

welche das Lagrangesche Interpolationspolynom in der Variablen x berechnet, wobei `a` ein Vektor der Länge n ist und die zu interpolierenden Daten (x_k, y_k) $(k = 1, \ldots, n)$ enthält.

Man gebe die Funktionen fehlerfrei ein.

Die benutzte DERIVE Funktion `ELEMENT(v,k)` ergibt das k. Element des Vektors `v`, und die Funktion `DIMENSION(v)` berechnet seine Dimension, also die Anzahl seiner Elemente.

Für die Interpolationsdaten $\{(-2,0),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,0)\}$ von Abbildung 1.3 ergibt eine Anwendung von `Simplify` bzw. `Expand` auf den `Author` Ausdruck `LAGRANGE([[-2,0],[-1,1],[0,0],[1,1],[2,0]],x)`

$$4: \quad \frac{x^2(2-x)(x+2)}{3} \qquad \text{bzw.} \qquad 5: \quad \frac{4x^2}{3} - \frac{x^4}{3}\,.$$

Man stelle die Interpolationsdaten[26] sowie das Interpolationspolynom graphisch dar!

ÜBUNGSAUFGABEN

◇ **3.17** *Zeige, daß die* DERIVE *Funktion* `LAGRANGE(a,x)` *aus* DERIVE-*Sitzung* 1.6 *das Lagrangesche Interpolationspolynom bzgl. der Variablen x berechnet, wobei* `a` *ein Vektor der Länge n ist und die zu interpolierenden Daten (x_k, y_k) $(k = 1, \ldots, n)$ enthält.*
Definiere `LAGRANGE` *und sichere die Funktion für spätere Verwendung in einer Datei. Berechne mit der Funktion dann das Interpolationspolynom für die folgenden Daten*

(a) `a:=[[-1,1],[0,0],[1,1]]` ,

(b) `a:=VECTOR([k,1/k],k,1,5)` ,

(c) `a:=[[0,0],[1,0],[2,0],[1/2,1]]` ,

(d) `a:=VECTOR(VECTOR(k^j,j,2,3),k,1,4)` ,

(e) `a:=[[0,0],[1,1],[2,2],[3,0]]` ,

(f) `a:=VECTOR([k,COMB(5,k)],k,0,5)` ,

(g) `a:=[[-4,0],[-3,1],[-2,1],[-1,1],[0,1],[1,1],[2,1],[3,1],[4,0]]` .

Stelle die gegebenen Interpolationsdaten und die zugehörigen Interpolationspolynome graphisch dar. Bestimme auch nichtpolynomiale Interpolationen ((b), (d)).

[25] Wir haben die Funktionen zur besseren Lesbarkeit mehrzeilig geschrieben. Man muß sie jedoch in einer Zeile eingeben.

[26] Dazu wende man das `Plot Plot` Kommando auf den mit Hilfe der Kursortasten hervorgehobenen Punktevektor an.

◇ **3.18** *Die folgenden Fragen betreffen die Definition von* `LAGRANGE(a,x)` *aus* DERIVE-*Sitzung* 1.6.

(a) *Wie könnte man auf die Hilfsfunktion* `LAGRANGE_AUX(a,x,k,n)` *verzichten? Gibt es irgendeinen Vorteil durch die Benutzung der Hilfsfunktion zur Definition von* `LAGRANGE(a,x)`*?*

(b) *Was ergibt* `LAGRANGE(a,x)`*, wenn die Interpolationsdaten* `a` *zwei Punkte mit dem gleichen x-Wert, aber verschiedenen y-Werten enthalten? Erkläre das Ergebnis!*

(c) *Warum wurden als Summations- bzw. Produktvariablen die Symbole* `j_` *und* `k_` *und nicht einfach* `j` *und* `k` *verwendet?*

3.19 *Zeige: Weisen die Interpolationsdaten eine gerade oder ungerade Symmetrie auf, ist das zugehörige Interpolationspolynom gerade bzw. ungerade.*

3.5 Rationale Funktionen im Reellen

Zur Konstruktion von Polynomen werden die Operationen Addition, Subtraktion und Multiplikation verwendet. Lassen wir zusätzlich die Division zu, kommen wir zur Familie der (reellen) *rationalen Funktionen* $r(x)$, die die Form

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

haben, wobei p und q Polynome bzgl. x sind. Während Polynome für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert sind (sie sind sogar für alle $x \in \mathbb{C}$ wohldefiniert – dies wird in § 1.6 genauer untersucht werden), sind rationale Funktionen an denjenigen Stellen $x \in \mathbb{R}$ nicht erklärt, an denen der Nenner $q(x)$ verschwindet.

Der Graph einer Funktion der Form $f(x) = \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{R})$ wird *Hyperbel* genannt. Man beachte, daß f an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist. Ferner beobachte man das Verhalten der Hyperbeln in Abbildung 1.4 in der Nähe von $x = 0$! Wir nennen solche Stellen $x \in \mathbb{R}$ *Polstellen* von f.

Wir betrachten nun rationale Funktionen, deren Zähler- und Nennerpolynom linear sind. Diese haben die allgemeine Form $r(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Die Darstellung

$$r(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = A + \frac{B}{x - C} \tag{3.18}$$

(die wir z. B. durch Polynomdivision erhalten, s. Übungsaufgabe 1.25) zeigt, daß der Graph von r der Hyperbel $\frac{B}{x}$ entspricht, die um A Einheiten in Richtung der y-Achse und C Einheiten in Richtung der x-Achse verschoben ist.

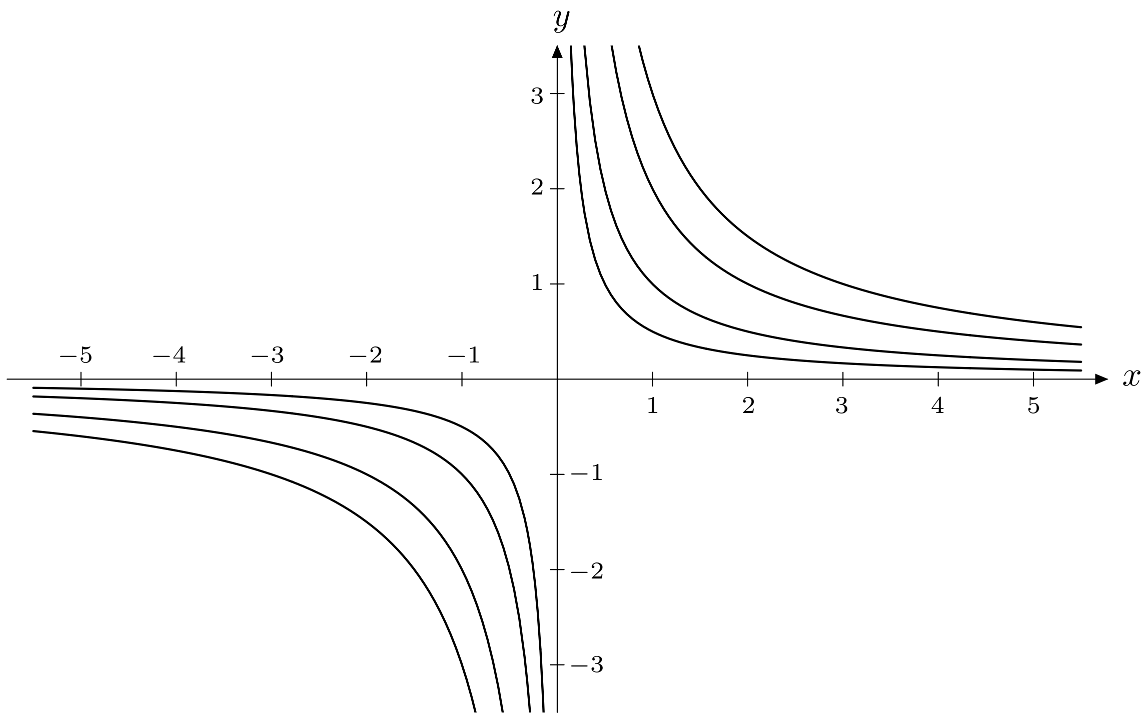

Abbildung 3.4 Die Graphen von $f(x) = \frac{a}{x}$ für $a = \frac{1}{2}, 1, 2$ und 3

Man betrachte die Graphen der rationalen Monome $f(x) = \frac{1}{x^n}$ mit DERIVE für $n = 1, \ldots, 10$. Diese haben alle $(1, 1)$ als gemeinsamen Punkt und am Ursprung einen Pol.

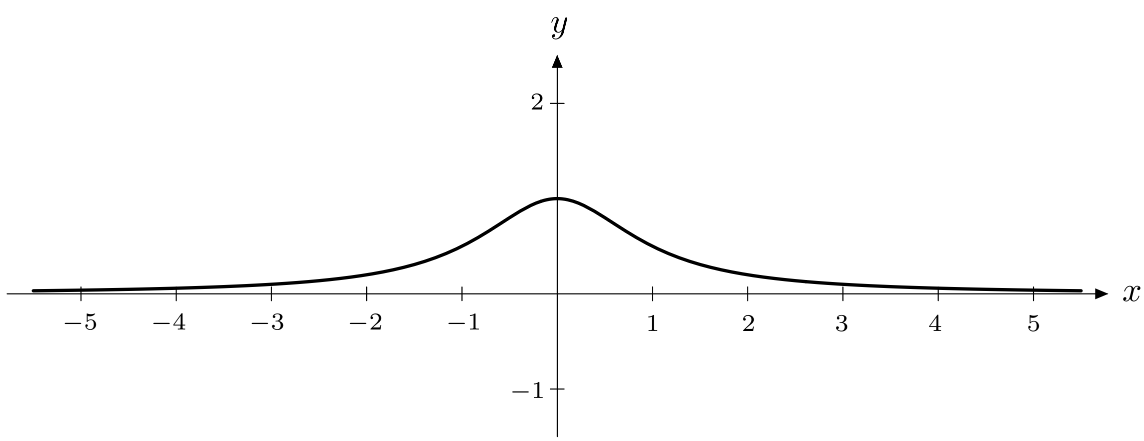

Abbildung 3.5 Der Graph der quadratischen rationalen Funktion $\frac{1}{1+x^2}$

Abbildung 1.5 zeigt als weiteres Beispiel die rationale Funktion $r(x) = \frac{1}{1+x^2}$, die sich vollkommen anders verhält. Man beachte, daß der Nenner $q(x) = 1 + x^2$ dieser quadratischen rationalen Funktion r auf Grund des Satzes 1.1 (b) nie verschwindet[27]. Dadurch unterscheidet sich der Graph von r sehr stark von einer Hyperbel.

[27] Dieser Satz hatte zum Inhalt, daß *reelle* Zahlen x nichtnegative Quadrate $x^2 \geq 0$ haben.

Bisher haben wir nur sehr einfache Polynome und rationale Funktionen betrachtet. Mit DERIVE können wir auch kompliziertere Beispiele untersuchen.

Sitzung 3.7 Stelle den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)(2+x)(x-3)}$ mit DERIVE dar. Man sieht, daß die Funktion die Pole $x = -3$, $x = 1$, und $x = 3$ hat, und daß zwischen den letzten beiden Polen der Graph von f ein lokales Minimum in der Nähe von $(2, \frac{3}{4})$ annimmt. Wir werden nun durch wiederholte graphische Darstellung die Koordinaten dieses Punktes bestimmen. Bewege das *Zentrierkreuz* (das man z. B. in Abbildung 13.10 sehen kann) mit den *Kursortasten* oder mit dem `Move` Befehl in die Nähe des lokalen Minimums. Zentriere das Bild nun mit `Center`. DERIVE gibt den Graphen dann erneut aus. Diesen Vorgang kann man mit `Zoom` in Richtung `In` unterbrechen und erhält dadurch eine bessere Näherung des Graphen von f in der Umgebung des betrachteten Punktes. In der letzten Zeile von DERIVE, der *Statuszeile*, kann man die Koordinaten des Zentrierkreuzes und die Skalierungsfaktoren sehen.

Durch Wiederholen der Befehlsfolge `Center` und `Zoom` erhalten wir immer bessere Näherungen für die Koordinaten des Minimums.

Im allgemeinen sind die analytischen Eigenschaften von Polynomen und rationalen Funktionen recht kompliziert, so daß wir diese erst in den folgenden Kapiteln genauer betrachten werden. Ihr algebraisches Verhalten ist jedoch einfacher zu untersuchen.

Sitzung 3.8 Man gebe erneut den rationalen Ausdruck `(1+x)/((1-x)(2+x)(x-3))` ein. Die Anwendung des `Expand` Befehls[28] erzeugt die sog. *Partialbruchzerlegung*[29]

$$2: \qquad \frac{1}{15(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{5(x-3)}$$

der Funktion.

Die Partialbruchzerlegung stellt in gewisser Hinsicht eine Vereinfachung dar: Eine rationale Funktion wird durch eine Summe rationaler Funktionen kleineren Grades dargestellt – in unserem Fall mit *konstanten* Zählern. Wir wollen nun untersuchen, wie man zu einer Partialbruchzerlegung kommt.

Die Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion r hängt offensichtlich von der Faktorisierung des Nenners q ab. Um eine Faktorisierung von q zu finden, verwenden wir die Tatsache, daß jeder Faktor $(x - x_0)$ eines Polynoms q einer Nullstelle x_0 von q entspricht, s. Satz 1.1. Wir können ferner die Lösungsformel für quadratische Gleichungen verwenden, um Nullstellen zu finden. Falls der Grad größer als 2 ist, müssen wir einige Nullstellen *erraten*[30], indem wir vernüftig scheinende Werte x_0

[28] Man beachte, daß `Expand` auf rationale Funktionen völlig anders wirkt als auf Polynome!

[29] Englisch: partial fraction decomposition

[30] Das Erraten von Nullstellen hängt offensichtlich von der Erfahrung oder sogar dem Scharfsinn des Ratenden ab. Die Tatsache, daß ein Programm wie DERIVE in der Lage ist, Polynome zu faktorisieren, ist nicht nur ein Resultat der hohen Rechengeschwindigkeit, sondern beruht im wesentlichen darauf, daß es eine Methode zur Bestimmung von Faktoren gibt, die immer erfolgreich ist. Eine derartige Methode nennt man einen *Algorithmus*. In DERIVE ist ein solcher Algorithmus implementiert. Dieser kann einen Faktor zumindest dann bestimmen, wenn der Real- und der Imaginärteil der zugehörigen Nullstelle rational ist – falls der Speicherplatz ausreicht.

in q einsetzen. Hat q eine Nullstelle, dann kann der Faktor $(x - x_0)$ von q gemäß Satz 1.1 gekürzt werden. Zur Durchführung dieser Kürzung verwenden wir die sog. *Polynomdivision* von q durch $(x - x_0)$. Wir geben ein Beispiel.

Beispiel 3.2 (Faktorisierung von Polynomen) Wie wollen eine Faktorisierung des Polynoms $q(x) := -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$ bestimmen. Zuerst überführen wir q in eine standardisierte Form mit 1 als *führendem Koeffizienten*, dem Koeffizienten des Terms höchster Ordnung x^3

$$q(x) = -(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\ .$$

Da q den Grad 3 hat, kann man die Lösungsformel für quadratische Gleichungen nicht sofort anwenden. Wir müssen einen Faktor erraten. Durch Einsetzen einiger Werte für x finden wir heraus, daß $x_1 = 1$ eine Nullstelle von q ist. Die Polynomdivision

$$\begin{array}{rrrrrcccc}
 & (x^3 & -2x^2 & -5x & +6) & : & (x-1) & = & x^2 - x - 6 \\
- & (x^3 & -x^2) & & & & & & \\
\hline
 & & -x^2 & -5x & +6 & & & & \\
 & - & (-x^2 & +x) & & & & & \\
\hline
 & & & -6x & +6 & & & & \\
 & & - & (-6x & +6) & & & & \\
\hline
 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

führt zur Faktorisierung

$$q(x) = -(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = -(x - 1)(x^2 - x - 6)\ .$$

Die Nullstellen des verbleibenden quadratischen Polynoms können mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ermittelt werden. Sie sind $x_2 = -2$ und $x_3 = 3$. Wir haben die drei Faktoren $(x - 1)$, $(x + 2)$ und $(x - 3)$ bestimmt und somit die Produktdarstellung

$$q(x) = -(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = -(x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

gefunden. $\triangle$

Wir wollen nun die Partialbruchzerlegung durchführen. Es können dabei die folgenden Situationen auftreten: Die reelle Faktorisierung des Nenners kann

1. einfache lineare Faktoren $(x - x_0)$,
2. Potenzen linearer Faktoren $(x - x_0)^n$ mit $n > 1$ und
3. quadratische Faktoren $x^2 + ax + b$, die in $\mathbb{R}$ irreduzibel sind,

enthalten. Hierbei heißt ein Polynom (über $\mathbb{R}$) *irreduzibel*, wenn es nicht in ein Produkt reeller Polynome kleinerer Ordnung zerlegt werden kann. Wir werden später beweisen, daß alle Faktoren auf lineare oder quadratische zurückgeführt werden können. Tritt der zweite Fall auf, nennt man x_0 eine n-fache Nullstelle von q. Hat ein Faktor x^2+ax+b *keine* reellen Nullstellen, dann tritt der dritte Fall auf. Offensichtlich geschieht dies genau dann, wenn man aus der Lösungsformel für quadratische Gleichungen keine reellen Werte erhält, d. h., wenn $a^2-4b<0$ gilt. Im allgemeinen sind solche Faktoren wesentlich schwieriger zu bestimmen (vor allem, wenn man sie von Hand berechnen muß!). Die Form der Partialbruchzerlegung hängt offensichtlich von den auftretenden Fällen ab. Die allgemeine Form können wir Satz 1.2 entnehmen.

Das obige Beispiel ist besonders einfach, da der Nenner nur einfache lineare Faktoren enthält. Wir werden nun an diesem Beispiel zeigen, wie man die Partialbruchzerlegung berechnet, wenn man schon eine Faktorisierung des Nenners hat.

Beispiel 3.3 (Partialbruchzerlegung) Für die Partialbruchzerlegung von

$$r(x)=\frac{1+x}{(1-x)(2+x)(x-3)}$$

machen wir den Ansatz

$$r(x)=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-3}$$

für r, und wir müssen die Werte der Konstanten a,b und c bestimmen. Da die beiden Formeln übereinstimmen müssen, bringen wir sie auf den Hauptnenner

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{(1-x)(2+x)(x-3)} &= \frac{-1-x}{(x+2)(x-1)(x-3)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-3} \qquad (3.19)\\ &= \frac{(x-1)(x-3)a+(x+2)(x-3)b+(x+2)(x-1)c}{(x+2)(x-1)(x-3)}\,.\end{aligned}$$

Offensichtlich müssen die Zähler des zweiten und des vierten Ausdrucks gleich sein, so daß wir zu der folgenden Polynomgleichung gelangen

$$-1-x=(x-1)(x-3)a+(x+2)(x-3)b+(x+2)(x-1)c\,. \qquad (3.20)$$

Zur Bestimmung der passenden Werte für a,b und c stellen wir zwei Methoden vor.

Methode 1 (Einsetzen) Wir setzen für x geeignete Werte in Gleichung (1.20) ein und erhalten so ein Gleichungssystem mit den Unbekannten a,b und c, das besonders einfach ist. Die günstigsten Werte sind nämlich offensichtlich die Nullstellen des Nenners von r, da dann auf der rechten Seite von Gleichung (1.20) die meisten Summanden verschwinden. Wir erhalten so die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}1 &= 15\,a\\ -2 &= -6\,b\\ -4 &= 10\,c\,,\end{aligned}$$

die man sofort nach a, b und c auflösen kann. Falls der Nenner von r nur einfache reelle Nullstellen besitzt, ist diese Methode am günstigsten.

Wir wollen darauf verweisen, daß man zeigen kann (s. Übungsaufgabe 6.10), daß diese Methode korrekt ist. Wir haben nämlich eigentlich einen großen Fehler gemacht: Unsere Werte für a, b und c sind zwar Lösungen der Gleichung (1.20), wir können die Werte jedoch nicht in Gleichung (1.19) selbst einsetzen, da hier der Nenner verschwindet! (Diese Art von Fehler führt häufig zu vollkommen falschen Ergebnissen, s. Übungsaufgabe 1.22.)

Methode 2 (Koeffizientenvergleich) Um die Konstanten a, b und c zu finden, die Gleichung (1.20) erfüllen, können wir auch die Tatsache ausnützen, daß zwei Polynome genau dann gleich sind, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen. Wenn wir nun Gleichung (1.20) ausmultiplizieren und Summanden mit gleichen Potenzen von x zusammenfassen, so erhalten wir

$$-x - 1 = x^2(a + b + c) - x(4a + b - c) + 3a - 2(3b + c)\ .$$

Durch Vergleich der Koeffizienten auf der rechten und der linken Seite der Gleichung erhalten wir das Gleichungssystem

$$\text{Koeffizienten von } x^0: \qquad -1 = 3a - 2(3b + c)\ , \tag{3.21}$$

$$\text{Koeffizienten von } x^1: \qquad -1 = -(4a + b - c)\ , \tag{3.22}$$

$$\text{Koeffizienten von } x^2: \qquad 0 = a + b + c\ . \tag{3.23}$$

Die Lösung eines solchen linearen Gleichungssytemes ist immer möglich, aber u. U. sehr zeitaufwendig. Als Übungsaufgabe 1.27 soll dieses System gelöst werden. △

Wir nehmen an, daß Leserinnen und Leser mit der Lösung linearer Gleichungssysteme vertraut sind. Hierzu stellt DERIVE jedoch eine ausgezeichnete Hilfe dar.

> **Sitzung 3.9** Man definiere die Gleichungen (1.21)–(1.23) als Vektor und löse das System dann mit dem `soLve` Menü.

Beispiel 3.4 (Polynomanteil) Wir wollen nun den Fall betrachten, daß der Grad des Zählers größer oder gleich dem Grad des Nenners ist. Es gibt in diesem Falle einen polynomialen Anteil, den man ebenfalls durch Polynomdivision erhält. Wir ändern dazu ein altes Beispiel leicht ab. Wir wollen nun

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 10}{x - 1}$$

vereinfachen. In Beispiel 1.2 haben wir durch Polynomdivision gezeigt, daß

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 1} = x^2 - x - 6$$

gilt. Daraus folgt offensichtlich die Gleichung

$$\frac{x^3-2x^2-5x+10}{x-1} = \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-1} + \frac{4}{x-1} = x^2-x-6+\frac{4}{x-1}\ .$$

Wir haben also durch Polynomdivision den polynomialen Anteil und den Rest erhalten.

Beispiel 3.5 (Polynomdivision) Wir betrachten das schwierigere Beispiel

$$\frac{x^5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\ .$$

Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
 & x^5 & : & (x^4-2x^3+2x^2-2x+1) & & & & = & x+2+\dfrac{2x^3-2x^2+3x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\ .\triangle \\
- & (x^5 & -2x^4 & +2x^3 & -2x^2 & +x) & & & \\
\hline
 & & 2x^4 & -2x^3 & +2x^2 & -x & & & \\
 & - & (2x^4 & -4x^3 & +4x^2 & -4x & +2) & & \\
\hline
 & & & 2x^3 & -2x^2 & +3x & -2 & &
\end{array}$$

Wir können nun das folgende fortgeschrittene Beispiel zur Partialbruchzerlegung angehen.

Beispiel 3.6 (nochmals Partialbruchzerlegung) Wir wollen die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{x^5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$$

bestimmen. Die Rechnungen in Beispiel 1.5 zeigten, daß

$$\frac{x^5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x+2+\frac{2x^3-2x^2+3x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$$

gilt. Wir müssen also noch die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{2x^3-2x^2+3x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$$

finden. Hier ist der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners.

Zunächst bestimmen wir eine Faktorisierung des Nenners. Wir können erraten, daß $x=1$ eine Nullstelle ist. Durch Polynomdivision erhält man

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
 & (x^4 & -2x^3 & +2x^2 & -2x & +1) & : & (x-1) & = \; x^3-x^2+x-1\ , \\
- & (x^4 & -x^3) & & & & & & \\
\hline
 & & -x^3 & +2x^2 & -2x & +1 & & & \\
 & - & (-x^3 & +x^2) & & & & & \\
\hline
 & & & x^2 & -2x & +1 & & & \\
 & & - & (x^2 & -x) & & & & \\
\hline
 & & & & x & -1 & & & \\
 & & & - & (x & -1) & & & \\
\hline
 & & & & & 0 & & &
\end{array}$$

womit

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x^3 - x^2 + x - 1) \;.$$

Eine Anwendung derselben Methode mit demselben Faktor liefert die Darstellung

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2(x^2+1) \;.$$

Da der Faktor (x^2+1) in $\mathbb{R}$ irreduzibel ist (dies ist ja gerade der Ausdruck, der uns zur Definition der imaginären Einheit i veranlaßte!), ist dies die gesuchte reelle Faktorisierung.

Wir nehmen nun an, daß die Partialbruchzerlegung die Form

$$\begin{aligned}\frac{2x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{a+bx}{x^2+1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{x-1} \\ &= \frac{x^3(b+d) + x^2(a-2b+c-d) - x(2a-b-d) + a + c - d}{(x-1)^2(x^2+1)}\end{aligned}$$

hat (Satz 1.2 macht genaue Aussagen über die allgemeine Form der Partialbruchzerlegung), so daß wir die Polynomidentität

$$2x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = x^3(b+d) + x^2(a-2b+c-d) - x(2a-b-d) + a + c - d$$

erhalten. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + c - d &= -2 \\ -2a + b + d &= 3 \\ a - 2b + c - d &= -2 \\ b + d &= 2 \;. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Dieses System besitzt die Lösung (s. Übungsaufgabe 1.27)

$$a = -\frac{1}{2} \;, \quad b = 0 \;, \quad c = \frac{1}{2} \;, \quad d = 2 \;,$$

so daß wir schließlich die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$$

erhalten. Die ursprüngliche Funktion besitzt somit die Zerlegung

$$\frac{x^5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + x + 2 \;. \quad \triangle$$

Der folgende Satz gibt eine allgemeine Beschreibung einer reellen Partialbruchzerlegung. Ein Beweis erfolgt in § 1.6.

Satz 3.2 (Reelle Partialbruchzerlegung) Sei $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine gegebene reelle rationale Funktion. Der Nenner habe die Faktorisierung

$$(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\cdots(x-x_M)^{p_M}(x^2+A_1x+B_1)^{q_1}\cdots(x^2+A_Nx+B_N)^{q_N}$$

mit den Nullstellen $x_1,\ldots,x_M$, und die Ausdrücke $x^2+A_kx+B_k$ $(k=1,\ldots,N)$ seien in $\mathbb{R}$ irreduzible quadratische Faktoren. Dann gibt es eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned}
r(x) \quad = \quad & s(x) \\
& + \left(\frac{c_{11}}{x-x_1} + \frac{c_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1p_1}}{(x-x_1)^{p_1}}\right) \\
& + \left(\frac{c_{21}}{x-x_2} + \frac{c_{22}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{c_{2p_2}}{(x-x_2)^{p_2}}\right) \\
& \vdots \\
& + \left(\frac{c_{M1}}{x-x_M} + \frac{c_{M2}}{(x-x_M)^2} + \cdots + \frac{c_{Mp_M}}{(x-x_M)^{p_M}}\right) \\
& + \left(\frac{d_{11}(x)}{x^2+A_1x+B_1} + \frac{d_{12}(x)}{(x^2+A_1x+B_1)^2} + \cdots + \frac{d_{1q_1}(x)}{(x^2+A_1x+B_1)^{q_1}}\right) \\
& + \left(\frac{d_{21}(x)}{x^2+A_2x+B_2} + \frac{d_{22}(x)}{(x^2+A_2x+B_2)^2} + \cdots + \frac{d_{2q_1}(x)}{(x^2+A_2x+B_2)^{q_2}}\right) \\
& \vdots \\
& + \left(\frac{d_{N1}(x)}{x^2+A_Nx+B_N} + \frac{d_{N2}(x)}{(x^2+A_Nx+B_N)^2} + \cdots + \frac{d_{Nq_1}(x)}{(x^2+A_Nx+B_N)^{q_N}}\right) ,
\end{aligned}$$

wobei s ein reelles Polynom ist, $c_{jk} \in \mathbb{R}$ Konstanten und $d_{jk}(x)$ lineare Funktionen bzgl. x sind, d. h. die Form $d_{jk}(x) = a_{jk}x + b_{jk}$ $(a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R})$ besitzen. □

Übungsaufgaben

3.20 *Bestimme für die Funktion $f(x) := \frac{1}{1+x^3}$ die Zerlegung in geraden und ungeraden Anteil. Stelle f sowie den geraden und ungeraden Anteil graphisch dar.*

◇ **3.21** *Stelle den Graphen von $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ dar. Warum besitzt f nur an der Stelle $x=-1$ einen Pol, obwohl der Nenner von f die beiden Nullstellen -1 und 1 hat?*

3.22 *Sei $x = 1$. Dann gilt offensichtlich*

$$x = (1-x) + 1 .$$

Wir teilen diese Gleichung durch $1-x$ und erhalten

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} + \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{1}{1-x} .$$

Wir ziehen nun auf beiden Seiten der Gleichung $x/(1-x)$ ab und bekommen die Gleichung

$$0 = 1 + \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 1 + \frac{1-x}{1-x} = 2 \; ,$$

und damit $0 = 2$. Mit solchen Umformungen kann man leicht beweisen, daß alle Zahlen gleich sind. Wo liegt der Fehler?

◇ **3.23** *Welches Verhalten kann man den Graphen in Abbildung* 1.6 *entnehmen?*

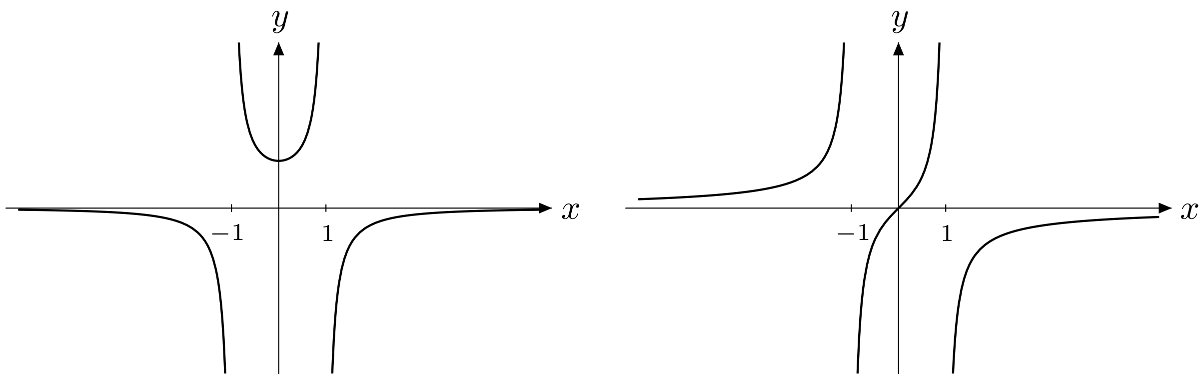

Abbildung 3.6 Zwei rationale Funktionen

Welche Form haben die zugehörigen Funktionsausdrücke? Versuche, entsprechende Formeln zu bestimmen, und stelle ihre Graphen mit Derive *dar, bis passende Formeln gefunden sind.*

◇ **3.24** *Stelle den Graphen der rationalen Funktion $f(x) = \frac{1+x^2}{x^3-2x-1}$ dar. Man gebe eine verbale Beschreibung seines Verhaltens und suche die Partialbruchzerlegung.*

3.25 *Beweise Gleichung* (1.18) *durch Polynomdivision von Hand sowie durch Nachrechnen mit* Derive.

3.26 *Die rationalen Faktoren von Polynomen lassen sich oft erraten. Finde Produktdarstellungen für*

(a) $q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, (b) $q(x) = x^3 - 2x^2 + x$,

(c) $q(x) = 12x^3 + 36x^2 + 15x - 18$, (d) $q(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$,

(e) $q(x) = 16x^3 - 4x^2 - 8x + 3$, (f) $q(x) = 5x^3 - 6x^2 + 5x - 6$

durch Anwendung der Polynomdivision. Ist Derive *in der Lage, die Polynome zu faktorisieren?*

3.27 *Löse die linearen Gleichungssysteme der Gleichungen*

(a) (1.21)–(1.23) , (b) (1.24)

von Hand und überprüfe die Ergebnisse mit Derive.

3.28 *Ermittle die Partialbruchzerlegung für*

(a) $\dfrac{1}{(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)}$, (b) $\dfrac{3x^4}{x^3-1}$,

(c) $\dfrac{1}{x^4-1}$, (d) $\dfrac{x^4+x^2}{x^3-x^2-x+1}$

von Hand und überprüfe die Ergebnisse mit DERIVE.

◇ **3.29** *Wende* `Expand` *auf den rationalen Ausdruck*

$$\frac{1}{x^2+2x-2}$$

an, um seine Partialbruchzerlegung zu bestimmen. Da das nicht funktioniert, versuche man es zunächst mit dem `Factor raDical` *Befehl. Diesen Trick sollte man sich merken.*

3.30 *Zeige durch Polynomdivision erneut, daß für alle* $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} ,$$

s. Übungsaufgabe 1.21.

3.31 *Zeige durch Polynomdivision erneut, daß für* $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *die Gleichung*

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)$$

gilt, s. Übungsaufgabe 1.22.

3.6 Rationale Funktionen im Komplexen

Eine *komplexe Funktion* f ordnet den komplexen Zahlen $z \in D$ des Definitionsbereichs $D \subset \mathbb{C}$ jeweils eine komplexe Zahl $f(z)$ zu. Wir schreiben meist z für komplexe Variablen und nicht x, da wir für z oft die Darstellung $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ verwenden.

Komplexe Polynome und rationale Funktionen werden den reellen Polynomen und reellen rationalen Funktionen entsprechend definiert. Die komplexen Polynome dürfen allerdings auch komplexe Koeffizienten besitzen. Ein komplexes Polynom oder eine rationale Funktion r wird als Funktion

$$r : \begin{array}{l} \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C} \\ z \mapsto r(z) \end{array}$$

betrachtet. A steht hier für die Menge der Nullstellen des Nenners von r. Man beachte, daß alle reellen Polynome und rationalen Funktionen auch als komplexe Polynome und rationale Funktionen aufgefaßt werden können. Komplexe Funktionen lassen sich graphisch nicht so einfach darstellen, da sie eine Gaußsche Ebene, die z-Ebene, in eine andere Ebene, die w-Ebene, abbilden. Eine graphische Darstellung würde also vier Dimensionen benötigen.

Auf der anderen Seite kann man für rationale Funktionen im Komplexen leichter algebraische Resultate erhalten als im reellen Fall, da der Fundamentalsatz der Algebra 1.3 zur Verfügung steht: Jedes komplexe Polynom $q(z)$ hat mindestens eine komplexe Nullstelle z_0 mit $q(z_0) = 0$ (s. § 1.6). Durch Induktion folgt daraus leicht, daß jedes Polynom q vom Grad m eine Darstellung der Form ($C \in \mathbb{C}$)

$$q(z) = C \cdot \prod_{k=1}^{m} (z - z_k) \tag{3.25}$$

besitzt, wobei die Zahlen $z_k \in \mathbb{C}$ Nullstellen von q sind (s. Übungsaufgabe 1.32). Diese *Produktdarstellung* oder *Faktorisierung* eines komplexen Polynoms kann man in DERIVE u. U. mit dem Befehl `Factor Complex` ermitteln. Zur Berechnung der komplexen Produktdarstellung wird dieselbe Methode angewendet wie im reellen Fall, also die Polynomdivision. In Darstellung (1.25) kann eine Zahl z_k offensichtlich mehrfach auftreten. Die Häufigkeit ihres Auftretens heißt *Ordnung* der Nullstelle z_k. Wir schreiben die Produktdarstellung deshalb in einer anderen Form, die der Ordnung der verschiedenen Nullstellen von q Rechnung trägt.

Satz 3.3 (Faktorisierung komplexer Polynome) Das Polynom q habe die *verschiedenen* Nullstellen z_k $(k = 1, \ldots, M)$ der Ordnung p_k. Dann hat q die Produktdarstellung

$$q(z) = C \prod_{k=1}^{M} (z - z_k)^{p_k} \; .$$

Nun müssen wir die komplexe Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion diskutieren, die etwas einfacher als im reellen Fall ist. Diese folgt aus der komplexen Produktdarstellung und ist Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 3.4 (Komplexe Partialbruchzerlegung) Sei $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine komplexe rationale Funktion. Dann gibt es eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} r(z) &= s(z) + \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{c_{k1}}{z - z_k} + \frac{c_{k2}}{(z - z_k)^2} + \cdots + \frac{c_{kp_k}}{(z - z_k)^{p_k}} \right) \\ &= s(z) \\ &\quad + \left(\frac{c_{11}}{z - z_1} + \frac{c_{12}}{(z - z_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1p_1}}{(z - z_1)^{p_1}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{c_{21}}{z - z_2} + \frac{c_{22}}{(z - z_2)^2} + \cdots + \frac{c_{2p_2}}{(z - z_2)^{p_2}} \right) \end{aligned}$$

$$\vdots$$
$$+\left(\frac{c_{M1}}{z-z_M}+\frac{c_{M2}}{(z-z_M)^2}+\cdots+\frac{c_{Mp_M}}{(z-z_M)^{p_M}}\right) ,$$

wobei die z_k $(k=1,\ldots,M)$ die unterschiedlichen Nullstellen von q der Ordnung p_k sind, s ein Polynom ist, und die Zahlen $c_{kj}\in\mathbb{C}$ $(j=1,\ldots,k$ $(k=1,\ldots,M))$ komplexe Konstanten sind.

Beweis: Den polynomialen Anteil $s(z)$ erhält man wie üblich durch Polynomdivision. Man muß also nur noch die Gültigkeit der Darstellung für den Divisionsrest nachweisen, dessen Zähler einen kleineren Grad als $m := \deg q$ besitzt. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach m. Der Induktionsanfang $(m := 1)$ ist trivial (man schreibe die Aussage genau hin!). Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, daß für jedes Polynom, dessen Nenner höchstens den Grad $m-1$ hat, eine Partialbruchzerlegung existiert. Wir müssen nun zeigen, daß daraus eine entsprechende Darstellung für Polynome folgt, deren Nenner den Grad m haben. Es sei nun eine rationale Funktion $r = p/q$ vom Grad m gegeben. Dann hat q mindestens eine Nullstelle z_1, die die Ordnung p_1 habe. Damit besitzt q die Darstellung

$$q(z) = (z-z_1)^{p_1}S(z)$$

mit einem Polynom S, daß nicht in z_1 verschwindet. Also gilt $S(z_1)\neq 0$, und wir erhalten

$$r(z)-\frac{\frac{p(z_1)}{S(z_1)}}{(z-z_1)^{p_1}}=\frac{p(z)}{q(z)}-\frac{\frac{p(z_1)}{S(z_1)}}{(z-z_1)^{p_1}}=\frac{p(z)-\frac{p(z_1)}{S(z_1)}S(z)}{(z-z_1)^{p_1}S(z)} . \tag{3.26}$$

Dieser Ausdruck hat eine Nullstelle an der Stelle z_1, da

$$\frac{p(z_1)-\frac{p(z_1)}{S(z_1)}S(z_1)}{(z-z_1)^{p_1}S(z_1)}=0$$

gilt. Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Entweder ist der Zähler der rechten Seite von Gleichung (1.26), nämlich $p(z)-\frac{p(z_1)}{S(z_1)}S(z)$, identisch 0, oder er ist ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom, das höchstens den Grad $m-1$ hat. Im ersten Fall folgt $r(z) = \frac{p(z_1)/S(z_1)}{(z-z_1)^{p_1}}$, und wir sind fertig (ohne die Induktionsvoraussetzung überhaupt zu verwenden). Im zweiten Fall garantiert der Satz über die komplexe Faktorisierung die Existenz eines Polynoms P, das höchstens den Grad $m-2$ hat, mit

$$p(z)-\frac{p(z_1)}{S(z_1)}S(z) =: (z-z_1)P(z) .$$

Da z_1 auch eine Nullstelle des Nenners q von r ist, ist die Funktion Q, definiert durch

$$q(z) =: (z-z_1)Q(z) ,$$

ein Polynom vom Grad höchstens $m-1$.

Wir erhalten nun als Ergebnis die Darstellung

$$r(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{\frac{p(z_1)}{S(z_1)}}{(z-z_1)^{p_1}}+\frac{P(z)}{Q(z)} .$$

Da die Induktionsvoraussetzung eine Partialbruchzerlegung für $P(z)/Q(z)$ garantiert, ist damit unsere Aussage bewiesen. □

Wir können nun leicht das reelle Gegenstück zu unserem Satz entwickeln. Sei $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine reelle rationale Funktion mit Polynomen p und q, die den Grad n bzw. m haben. Dann sind die Koeffizienten von p und q reell. Sieht man q als komplexes Polynom an, so ist die Existenz einer komplexen Produktdarstellung gewährleistet.

Das reelle Polynom $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$, $(b_k \in \mathbb{R}\ (k = 0, \ldots, m))$ vom Grad m habe nun die Produktdarstellung

$$q(x) = C \prod_{k=1}^{m} (x - z_k) \quad (C \in \mathbb{C},\ z_k \in \mathbb{C}\ (k = 1, \ldots, m)) .$$

Es gilt offensichtlich $C \in \mathbb{R}$, da $C = b_m$ als Koeffizient von x^m nach Voraussetzung reell ist. Dies sieht man durch Koeffizientenvergleich. Weiterhin werden wir zeigen, daß die Zahlen z_k $(k = 1, \ldots, m)$ entweder reell sind oder in Paaren z_j, z_k mit $z_j = \overline{z_k}$ auftreten. Dies liegt daran, daß mit $q(z_k) = 0$ auch

$$q(z_j) = q(\overline{z_k}) = \sum_{k=0}^{m} b_k \overline{z_k}^k \overset{(b_k \in \mathbb{R})}{=\!=} \sum_{k=0}^{m} \overline{b_k} \overline{z_k}^k = \overline{\sum_{k=0}^{m} b_k z_k^k} = \overline{q(z_k)} = 0 ,$$

da die b_k $(k = 0, \ldots, m)$ reell sind.

Wir erhalten nun eine Produktdarstellung mit linearen Faktoren der Form $(x - x_0)$ für die reellen Nullstellen und mit quadratischen Faktoren $(x^2 + A_0 x + B_0)$, die den nichtreellen Faktoren entsprechen (s. Übungsaufgabe 1.33).

Dieses Wissen ermöglicht uns dann, einen induktiven Beweis von Satz 1.2 zu führen, der dem Beweis für die komplexe Partialbruchzerlegung (Satz 1.4) ähnlich ist. Dieser Beweis ist Inhalt von Übungsaufgabe 1.36.

Sitzung 3.10 Die komplexe Partialbruchzerlegung ist in DERIVE nicht implementiert. Man beachte, daß die Anwendung von `Expand` auf den Ausdruck

$$1: \qquad \frac{1}{x^2 - 2x + 2} .$$

nicht den gewünschten Erfolg hat. Faktorisiert man nun den Ausdruck mit dem `Factor Complex`[31] Menü, so erhält man das Ergebnis

$$4: \qquad \frac{1}{(x - 1 - \hat{\imath})(x - 1 + \hat{\imath})} .$$

Eine weitere Anwendung des `Expand` Befehls zeigt, daß in DERIVE die reelle und nicht die komplexe Partialbruchzerlegung implementiert ist.

Dennoch können wir die Fähigkeiten von DERIVE zusammen mit den Anweisungen aus § 1.5 zur Bestimmung der komplexen Partialbruchzerlegung nutzen. Man mache dazu den Ansatz[32]

[31] Ist diese Faktorisierung erfolglos (bis Version 2.06), markiere man den Nenner mit den Kursortasten und faktorisiere ihn mit `Factor Complex`.

[32] Man verwende die `<F4>`-Taste, um hervorgehobene Ausdrücke (eingeklammert) in die `Author`-Editierlinie zu kopieren.

$$6: \qquad \frac{1}{x^2 - 2x + 2} = \frac{a}{(x - 1 - \hat{\imath})} + \frac{b}{(x - 1 + \hat{\imath})} \ ,$$

multipliziere die gesamte Gleichung mit dem gemeinsamen Nenner und wende schließlich `Simplify` an. Man erhält dann das Resultat

$$9: \qquad 1 = (a + b)\,(x - 1) + \hat{\imath}\,(b - a) \ .$$

Wir wollen nun die Koeffizienten auf beiden Seiten dieser Gleichung miteinander vergleichen und verwenden dazu die Funktion `POLY_COEFF(f,x,k)` der `UTILITY` Datei `MISC.MTH`. Diese Funktion berechnet den k. Koeffizienten des Polynoms f bezüglich der Variablen x. Verwende zum Laden von `MISC.MTH` den `Transfer Load Utility` Befehl[33]. Eine Vereinfachung des Ausdrucks `VECTOR(POLY_COEFF(#9,x,k),k,0,1)` liefert

$$11: \qquad [1 = -a - b + \hat{\imath}\,(a - b), 0 = a + b] \ .$$

Damit haben wir die Koeffizienten der Ordnungen 0 und 1 auf den beiden Seiten der Polynomgleichung `#9` gleichgesetzt. Schließlich berechnet `soLve` die gesuchten Werte für a und b, nämlich

$$12: \qquad \left[a = -\frac{\hat{\imath}}{2}, b = \frac{\hat{\imath}}{2}\right] \ .$$

Setzt man diese Werte für a und b in Zeile `#6`, in der wir die Form der Partialbruchzerlegung festgelegt hatten, mit `Manage Substitute` ein, so erhält man die komplexe Partialbruchzerlegung

$$13: \qquad \frac{1}{x^2 - 2x + 2} = \frac{-\frac{\hat{\imath}}{2}}{(x - 1 - \hat{\imath})} + \frac{\frac{\hat{\imath}}{2}}{(x - 1 + \hat{\imath})} \ .$$

Übungsaufgaben

3.32 (Komplexe Produktdarstellung) *Zeige mittels Induktion, daß ein komplexes Polynom q vom Grad m eine Darstellung der Form ($C \in \mathbb{C}$)*

$$q(z) = C \cdot \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)$$

besitzt, wobei $z_k \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von q sind. Verwende den Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.3), d. h. die Tatsache, daß jedes komplexe Polynom mindestens eine komplexe Nullstelle besitzt.

[33] Die Verwendung des `Utility` Befehls hat den Vorteil, daß die Definitionen nicht in das Ausgabeformat des Bildschirmes umgewandelt werden. Dies ist die schnellste Art, Ausdrücke aus einer Datei einzulesen.

○ **3.33 (Reelle Produktdarstellung)** *Zeige: Jedes reelle Polynom q besitzt eine Produktdarstellung der Form*

$$q(x) = C(x - x_1) \cdots (x - x_M)(x^2 + A_1 x + B_1) \cdots (x^2 + A_N x + B_N) \qquad (3.27)$$

mit reellen Zahlen C, x_k $(k = 1, \ldots, M)$ und A_k, B_k $(k = 1, \ldots, N)$. Man gebe die reellen Produktdarstellungen der folgenden Polynome an.

(a) $4 + x^4$, (a) $1 + x^4$, (c) $1 + 2x^5 + x^{10}$.

3.34 *Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ ein komplexes Polynom und sei $\overline{p}$ durch $\overline{p}(x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, x^k$ erklärt. Dann ist das Produkt $p \cdot \overline{p}$ ein reelles Polynom.*

3.35 *Zeige, daß ein reelles Polynom $q(x)$ mit ungeradem Grad eine reelle Nullstelle besitzt.*[34] *Verwende dazu die Produktdarstellung* (1.27).

3.36 (Reelle Partialbruchzerlegung) *Beweise Satz* 1.2. Hinweis: *Man betrachte ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$, deren Nenner q keine reellen Nullstellen besitzt. Dann hat q die gerade Ordnung $2m$ $(m \in \mathbb{N})$. Mache einen Induktionsbeweis nach m wie in Satz* 1.4 *unter Verwendung der beiden Nullstellen $z_1, \overline{z_1}$, die dem quadratischen Faktor $x^2 + Ax + B$ entsprechen.*

◇ **3.37** *Bestimme komplexe Partialbruchzerlegungen für*

(a) $\dfrac{2x}{x^2 - 4x + 8}$, (b) $\dfrac{1 + x + x^2}{x^4 - 1}$, (c) $\dfrac{1}{x^4 - 1}$,

(d) $\dfrac{x - x^2}{1 + 2x^2 + x^4}$, (e) $\dfrac{1 + x + x^2 + x^3}{x^4 - 1}$,

(f) $\dfrac{1 + 2x + 3x^2}{16 - 24x + 18x^2 - 6x^3 + x^4}$, (g) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{2 - 2x + 5x^2 - 4x^3 + 4x^4 - 2x^5 + x^6}$.

3.7 Umkehrfunktionen und algebraische Funktionen

Oft stellt sich die Aufgabe, eine Operation rückgängig zu machen. Um die Eingabe a nach einer Addition $a + b$ wiederzugewinnen, muß man b abziehen. Die Subtraktion wird deshalb als *Umkehrfunktion*[35] der Addition bezeichnet. Entsprechend ist die Division die Umkehrfunktion der Multiplikation.

Wir wollen uns nun dem allgemeinen Problem zuwenden, die Anwendung eines Funktionsaufrufs $f(x)$ auf eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ wieder rückgängig zu machen. Dazu benötigen wir einige neue Begriffsbildungen.

[34] Einen anderen Beweis werden wir in § 6.3 mit Hilfe analytischer Methoden geben.
[35] Englisch: inverse function

Definition 3.2 (Surjektivität, Injektivität, Bijektivität, Umkehrfunktion, Komposition) Die Funktion $f : D \to W$ bilde den Definitionsbereich D auf Werte in der Menge W ab. Die Menge W der möglichen Bildwerte nennen wir *Wertevorrat*[36]. Werden alle Werte des Wertevorrats wirklich angenommen, gilt also $W = f(D)$, so nennen wir die Funktion f *surjektiv*.

Im allgemeinen kann ein von f angenommener Wert mehrere Urbilder haben. Ist dies nicht der Fall, ist also für zwei verschiedene $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$, so nennen wir f *injektiv*[37]. Ist f surjektiv sowie injektiv, sprechen wir von einer *bijektiven*[38] Funktion.

Ist f injektiv, gibt es zu jedem $y \in f(D)$ genau ein Urbild x, und man nennt die Funktion $f^{-1} : f(D) \to D$, die jedem $y \in f(D)$ dieses Urbild $x \in D$ zuordnet, die *Umkehrfunktion* oder *inverse Funktion* von f.

Dann ist folglich f^{-1} bijektiv, und es gilt nach Definition

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in D \quad \text{sowie} \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{für alle } y \in f(D). \tag{3.28}$$

Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktionen, so wird die *Komposition* bzw. *Hintereinanderausführung* $g \circ f$ von f und g durch

$$g \circ f(x) := g(f(x))$$

erklärt. Bezeichnet man ferner mit

$$\mathrm{id}_A : \begin{array}{l} A \to A \\ x \mapsto \mathrm{id}_A(x) := x \end{array}$$

die *identische Funktion in A*, die alle Elemente unverändert läßt, so können wir (1.28) auch in der Form

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D \qquad \text{sowie} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(D)}$$

schreiben.

Beispiel 3.7 (Quadratwurzel) Ein Beispiel einer Umkehrfunktion ist die Quadratwurzel. Wie wir bereits in § 1.3 definiert hatten, ist die Quadratwurzel von y diejenige *positive* reelle Zahl $x = \sqrt{y}$, deren Quadrat gleich y ist. Wir haben also die Gleichung $y = x^2$ nach x aufgelöst und die positive Lösung ausgewählt. Es gibt für diese Fragestellung auch noch eine zweite, die negative, Lösung $x_2 = -\sqrt{y}$.

Die Wurzelfunktion ist allerdings *nicht* die Umkehrfunktion der Quadratfunktion

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) := x^2 \end{array} ,$$

[36] Man beachte, daß W von manchen Autoren auch *Wertebereich* genannt wird. Bei uns jedoch ist der Wertebereich der Bildbereich $f(D)$ von f.

[37] Englisch: univalent

[38] Englisch: one-to-one

da diese Funktion offensichtlich nicht injektiv ist. (Zum Beispiel ist der Punkt 1 sowohl das Bild von 1 als auch das von -1 unter f.) Die Quadratwurzelfunktion ist stattdessen die Umkehrfunktion der modifizierten Quadratfunktion

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) := x^2 \end{array} \quad .$$

Diese Funktion ist nicht für alle Werte aus $\mathbb{R}$ definiert, sondern nur für die nichtnegative reelle Achse. Für diese x-Werte ist der Wert $y = f(x)$ wegen (1.25) eindeutig. Um die Quadratfunktion umkehrbar zu machen, müssen wir also den Definitionsbereich in passender Weise einschränken. $\triangle$

Definition 3.3 (Einschränkung) Wenn wir den Definitionsbereich einer Funktion $f : M \to W$ auf die Menge A beschränken, so nennen wir die resultierende Funktion $f : A \to M$ die *Einschränkung* von f auf A und schreiben $f\Big|_A$.

Mit dieser Schreibweise folgt also kurz: Nicht x^2, sondern $x^2\Big|_{\mathbb{R}^+}$ ist injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion.

In Beispiel 1.11 werden wir zeigen, daß wirklich jede Zahl $y \in \mathbb{R}^+$ eine Quadratwurzel besitzt.

Beispiel 3.8 (Geometrische Deutung der Umkehrfunktion) Wir geben nun eine geometrische Deutung der Umkehrfunktionen. Betrachten wir dazu die Graphen in Abbildung 1.1. Was haben der Graph der Quadratfunktion und der Graph der Wurzelfunktion miteinander zu tun? Offenbar entsteht der Graph der Wurzelfunktion durch Spiegelung desjenigen Teils des Graphen der Quadratfunktion, der rechts vom Ursprung liegt, an der Winkelhalbierenden, d. h. der Geraden mit der Gleichung $y = x$. Wir werden sehen, daß diese geometrische Betrachtungsweise für alle Umkehrfunktionen zutrifft.

Der Graph der Funktion f besteht nämlich aus den Punkten $(x, f(x))$ und der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} definitionsgemäß aus den Punkten $(f(x), x)$. Geometrisch bedeutet dies natürlich, daß für die Graphen gerade die x- und die y-Achse vertauscht sind. Diese Vertauschung entspricht offenbar einer Spiegelung an der Geraden $y = x$. $\triangle$

Wir lernen nun eine wichtige Klasse von Funktionen kennen, die immer injektiv sind und daher Umkehrfunktionen besitzen.

Definition 3.4 (Monotone Funktionen) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ eines Intervalls $I = [a, b]$ heißt *monoton*, insbesondere

$$\begin{array}{c} \textit{wachsend}^{39} \\ \textit{streng wachsend} \\ \textit{fallend}^{40} \\ \textit{streng fallend} \end{array} \quad \text{falls} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(u) \le f(v) \\ f(u) < f(v) \\ f(u) \ge f(v) \\ f(u) > f(v) \end{array} \right. \quad \text{für jedes} \quad a \le u < v \le b \text{ gilt.}$$

Ist f streng fallend oder streng wachsend, so heißt f auch *streng monoton*.

Beispiel 3.9 (Monome) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Monom

$$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f_n(x) := x^n \end{array}$$

streng wachsend. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt nämlich die Beziehung (s. Übungsaufgaben 1.22 sowie 1.31)

$$f_n(x_2) - f_n(x_1) = x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_1 x_2^{n-2} + x_1^2 x_2^{n-3} + \cdots + x_1^{n-1}) ,$$

aus der für $0 < x_1 < x_2$ die Ungleichung $f_n(x_2) - f_n(x_1) > 0$ folgt. △

Beispiel 3.10 (Vorzeichenfunktion) Die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sign} x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ wachsend. Selbstverständlich ist sie als stückweise konstante Funktion nicht streng wachsend.

Es gilt nun folgendes allgemeines Kriterium.

Satz 3.5 (Streng monotone Funktionen haben eine Umkehrfunktion) Ist $f : I \to W$ eine auf einem reellen Intervall I definierte streng monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion, so ist f injektiv, es existiert also die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$, welche ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend) ist.

Beweis: Wir betrachten den Fall einer streng wachsenden Funktion f; ist nämlich f streng fallend, so ist $-f$ streng wachsend. Wir haben zu zeigen, daß für $x_1 \neq x_2$ auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ ist. Wegen der Trichotomie ist für $x_1 \neq x_2$ entweder $x_1 < x_2$ oder $x_1 > x_2$. Es folgt dann aus dem strengen Wachstum von f, daß entweder $f(x_1) < f(x_2)$ oder $f(x_1) > f(x_2)$, jedenfalls $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt. Das aber zeigt die Injektivität. Also existiert f^{-1}.

Wäre nun f^{-1} nicht streng wachsend, so gäbe es zwei Punkte $y_1, y_2 \in f(I)$, für die zwar $y_1 < y_2$, aber trotzdem $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ gilt. Aus dem Wachstum von f folgt daraus dann

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $y_1 < y_2$. Somit ist f^{-1} streng wachsend. □

Beispiel 3.11 (Wurzelfunktionen) Da die Monomfunktion $f_n(x) := x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Beispiel 1.9 auf der nichtnegativen reellen Achse $\mathbb{R}^+$ eine streng wachsende Funktion ist, zeigt eine Anwendung von Satz 1.5, daß f_n dort eine Umkehrfunktion f_n^{-1} besitzt. Der Wert $f_n^{-1}(y)$ wird die n. *Wurzel* von y genannt und mit $\sqrt[n]{y}$ abgekürzt. Man beachte, daß gemäß unserer Definition die n. Wurzel einer positiven Zahl y diejenige *positive* Zahl x ist, deren n. Potenz y ist.

Da es monotone Funktionen gibt, deren Bild kein Intervall ist, s. Übungsaufgabe 1.43, liefert eine Anwendung von Satz 1.5 keinen Hinweis darüber, ob tatsächlich für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ eine n. Wurzel *existiert*. Der Satz besagt lediglich, daß die n. Wurzel – falls existent – *eindeutig* ist.

[39] Englisch: increasing
[40] Englisch: decreasing

Man kann nun aber die Zahl $x = \sqrt[n]{y}$ genau wie im Fall von $\sqrt{2}$ (s. DERIVE-Sitzung 1.5) durch Angabe einer schrumpfenden Intervallschachtelung $I_k = [a_k, b_k]$ $(k \in \mathbb{N})$ von Intervallen der Länge $|I_k| = b_k - a_k = \frac{1}{10^{k-1}}$ bestimmen, für deren Endpunkte jeweils die Ungleichungen $a_k^n \leq y \leq b_k^n$ gelten. Auf Grund der Intervallschachtelungseigenschaft gibt es dann einen Punkt $x \in \mathbb{R}$, der allen Intervallen angehört, d. h. $x \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es bleibt dann zu zeigen, daß dieses x wirklich das gegebene Problem löst, daß also $x^n = y$ ist. Da nun aber für alle $k \in \mathbb{N}$ einerseits gemäß Konstruktion die Ungleichungen $a_k^n \leq y \leq b_k^n$, andererseits wegen der Monotonie der Monomfunktion f_n aber auch die Ungleichungen $a_k^n \leq x^n \leq b_k^n$ gelten, folgt die Behauptung, wenn wir nachweisen können, daß $[a_k^n, b_k^n]$ $(k \in \mathbb{N})$ eine schrumpfende Intervallschachtelung ist, aus Lemma 1.1. Dazu haben wir lediglich zu zeigen, daß $b_k^n - a_k^n$ gegen Null strebt. Dies aber folgt aus der Ungleichungskette

$$b_k^n - a_k^n = (b_k - a_k) \sum_{j=1}^{n} a_k^{j-1} b_k^{n-j} \leq (b_k - a_k) \sum_{j=1}^{n} b_1^{n-1} = (b_k - a_k) n b_1^{n-1} \leq \frac{n b_1^{n-1}}{10^{k-1}} ,$$

welche zeigt, daß $b_k^n - a_k^n$ genauso wie $b_k - a_k$ selbst (möglicherweise etwas langsamer) gegen Null strebt, da der auftretende Faktor $n b_1^{n-1}$ gar nicht von k abhängt.

Die dritte Wurzel heißt auch *Kubikwurzel*. Ist n ungerade, dann existiert die reelle Umkehrfunktion in ganz $\mathbb{R}$, s. Übungsaufgabe 1.39.

Die n. Wurzel wird oft durch

$$y = \sqrt[n]{x} =: x^{\frac{1}{n}} \tag{3.29}$$

als rationale Potenz dargestellt. Denn so können die Rechenregeln für Potenzen

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \tag{3.30}$$

und

$$a^{xy} = (a^x)^y \tag{3.31}$$

für $a \in \mathbb{R}^+$ auf rationale Exponenten $x, y \in \mathbb{Q}$ verallgemeinert werden (s. Übungsaufgabe 1.38). △

Wir beschäftigen uns nun allgemein mit den Umkehrfunktionen von Polynomen.

Definition 3.5 (Algebraische Funktionen) Wenn x und y eine Gleichung der Form

$$F(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{jk} x^j y^k = 0 \tag{3.32}$$

erfüllen, wobei $F(x, y)$ ein Polynom in den beiden Variablen x und y ist, dann nennen wir y eine *implizite algebraische Funktion* von x. Damit y wirklich eine Funktion ist, muß Gleichung (1.32) in einem bestimmten reellen Intervall I nach y auflösbar sein. Ist dies der Fall, so erfüllt die resultierende Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ die Gleichung $F(x, f(x)) = 0$ $(x \in I)$ und heißt *explizite algebraische Funktion*. Ist eine Funktion nicht algebraisch, so nennen wir sie *transzendent*. △

Man beachte, daß alle bisher untersuchten Funktionen algebraisch waren. Eine rationale Funktion r der Variablen x ist die Lösung einer Gleichung der Form $q(x)y - p(x) = 0$ mit Polynomen p und q, die Quadratwurzelfunktion ist eine spezielle Lösung der Gleichung $y^2 - x = 0$, und die n. Wurzelfunktion eine Lösung der Gleichung $y^n - x = 0$.

Beispiel 3.12 (Eine transzendente Funktion) Die Exponentialfunktion a^x, die für positives $a \in \mathbb{R}^+$ wegen der Festlegung (1.29) für rationale Exponenten $x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ durch

$$a^x = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

gegeben ist, kann an dieser Stelle nicht für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ definiert werden. Es wird sich herausstellen, daß es eine den Regeln (1.30)–(1.31) genügende Fortsetzung der angegebenen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ gibt, die allerdings nicht algebraisch, also transzendent ist. Diese reelle (sowie die komplexe) Exponentialfunktion wird später in Kapitel 5 behandelt werden.

Übungsaufgaben

3.38 *Zeige, daß die Potenzregeln* (1.30)–(1.31) *für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $x, y \in \mathbb{Q}$ gelten.*

3.39 *Zeige, daß die Monomfunktion $f(x) := x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ für ungerades n auf ganz $\mathbb{R}$ streng wachsend und somit injektiv ist. Damit ist für ungerade $n \in \mathbb{N}$ die n. Wurzel in ganz $\mathbb{R}$ sinnvoll definiert.*

3.40 *Zeige, daß die Monomfunktion $f(x) := x^n$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0)$ für negatives n auf $\mathbb{R}^+$ streng fallend und somit injektiv ist.*

3.41 *Zeige, daß die Dirichletsche*[41] *Funktion*

$$\text{DIRICHLET}\,(x) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \textit{ rational} \\ 0 & \textit{falls } x \textit{ irrational} \end{cases} \tag{3.33}$$

in keinem reellen Intervall monoton ist. Hinweis: *Verwende das Ergebnis von Übungsaufgabe* 1.33.
Die Dirichlet-Funktion ist ziemlich künstlich, aber sie hat – durch ihre eigentümliche Definition – so eigenartige Eigenschaften, daß sie sich hervorragend für Gegenbeispiele in der Analysis eignet.

3.42 *Seien zwei wachsende Funktionen $f, g : I \to W$ eines Intervalls I gegeben. Dann ist auch $f + g$ wachsend. Ist ferner $f, g > 0$ in I, so sind $f \cdot g$ wachsend sowie $1/f$ fallend. Dabei folgt aus strengem Wachsen wieder strenges Wachsen.*

3.43 *Gib ein Beispiel einer Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die streng wachsend ist, deren Bild $f([0,1])$ jedoch kein Intervall ist. Drücke diese Eigenschaft mit Hilfe des Begriffs der Surjektivität aus.*

[41] Peter Gustav Lejeune Dirichlet [1805–1859]

◇ **3.44** *Zeige, daß die folgenden Funktionen bijektiv sind, und gib ihre Umkehrfunktion jeweils explizit an.*

(a) $f_1 : [1, \infty) \to [1, \infty)$ *mit* $f_1(x) = x^2 - 2x + 2$,

(b) $f_2 : (\infty, 1] \to (\infty, 1]$ *mit* $f_2(x) = x^2 - 2x + 2$,

(c) $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ *mit* $f_3(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$,

(d) $f_4 : [1, \infty) \to [0, \infty)$ *mit* $f_4(x) = \sqrt{x-1} + \dfrac{x-1}{2}$.

◇ **3.45** *Bestimme die Nullstellen des Ausdrucks* $\sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{2\sqrt{x-1} + x}$.

◇ **3.46** *Welches sind die reellen Lösungen der Gleichung*

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1\ ?$$

Hinweis: *Bestimme zunächst einen geeigneten Definitionsbereich für x auf der reellen Achse. Benutze* DERIVE, *um den Graph der Funktion auf der linken Seite darzustellen, und beweise die Vermutung, die sich daraus ergibt.*

◇ **3.47** *Stelle die folgenden algebraischen Funktionen $x \mapsto y$ graphisch dar, und gib Definitionsbereiche an, in denen sie injektiv sind. Gib soweit möglich eine explizite Darstellung der Funktionen bzw. ihrer Umkehrfunktionen an. Man beachte, daß diese vom gewählten Definitionsbereich abhängen können.*

(a) $y^2 + x^3 = 1$, (b) $x^2 - xy + y^2 = 1$, (c) $x^2 - y^2 = 1$,

(d) $y^2 = x^2$, (e) $y^3 = x^2$, (f) $y^2 = x^4$.

◇ **3.48** *Stelle mit* DERIVE *die Graphen der folgenden algebraischen Funktionen dar.*

(a) $x^3 + y^3 = 3xy$, (b) $x^2 + y^4 - y^2 = 1$,

(c) $y^m = x$ *für* $m = 3, \ldots, 5$, (d) $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$,

(e) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x^2y^2 = y^2 + 4xy^2 - y^4$.

3.49 (Fixpunktsatz) *Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ wachsend. Dann gibt es eine Stelle $x_0 \in [0, 1]$ derart, daß $f(x_0) = x_0$ gilt.* Hinweis: *Man betrachte die Menge*

$$\{x \in [0, 1] \mid f(x) \le x\} \ .$$

○ **3.50** *Die Komposition zweier injektiver (surjektiver) Funktionen ist wieder injektiv (surjektiv).*

3.51 *Die Komposition wachsender Funktionen ist wachsend.*

3.52 *Zeige: Ist $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ eine ungerade injektive Funktion, dann ist f^{-1} ebenfalls ungerade.*