

1. **(Musik: Wohltemperiertes Stimmen)** Die Tonhöhe eines Tons wird durch seine Frequenz angegeben, welche in Schwingungen pro Sekunde (Hz) gemessen wird. Hierbei entsprechen wahrgenommene Tonhöhenunterschiede (Intervalle) festen Frequenzverhältnissen. Das Frequenzverhältnis  $\frac{2}{1}$  wird als Oktave wahrgenommen, das Frequenzverhältnis  $\frac{3}{2}$  entspricht einer Quinte und das Frequenzverhältnis  $\frac{4}{3}$  einer Quarte. Dies liegt daran, daß jeder Ton Obertöne enthält, deren Frequenz ein Vielfaches des Grundtones darstellt. Die ersten Obertöne sind die Oktave (doppelte Frequenz), die Quinte über der Oktave (dreifache Frequenz) und die Doppeloktave (vierfache Frequenz). Der Kammerton A hat 440 Hz und das nächst höhere A hat also die Frequenz 880 Hz. Hierzulande üblich ist eine Tonleiter aus 12 Tönen. Seit Johann Sebastian Bach stimmt man Tasteninstrumente „wohltemperiert“, das heißt, das Frequenzverhältnis  $c$  zweier aufeinanderfolgender Halbtöne ist immer gleich. Mit dieser Vereinbarung kann man eine Komposition in verschiedenen Tonarten spielen, ohne dass sich dies merkwürdig anhört. Dies geht allerdings auf Kosten einer kaum hörbaren Abweichung von den optimalen Frequenzverhältnissen.

Ton:	A	B	H	C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis	A
Tonschritt				kTz	gTz	Qrt		Qin					Okt
rein	1			$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$					2
wohltemp.	440Hz	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

- (a) Warum ergibt sich  $c = \sqrt[12]{2}$ ? (1 Punkt)
- (b) Um die Tabelle der Frequenzen zu ergänzen, braucht man  $c = \sqrt[12]{2}$  auf (mindestens) 4 Stellen genau. Schachteln sie  $c$  auf die nötige Anzahl von Dezimalen ein, wobei Sie mit dem Taschenrechner (ganzzahlig) potenzieren dürfen. (2 Punkte)
- (c) Ergänzen Sie die Tabelle durch ganzzahlige Approximationen der Frequenzen der Tonreihe. (2 Punkte)
- (d) Wie groß sind die relativen Abweichungen von den „reinen“ Frequenzen (je 0.5 Punkte)
- beim E (Quinte)
  - beim D (Quarte)
  - beim Cis (große Terz)
  - beim C (kleine Terz)
2. **(Ordnung)** Wir betrachten einen angeordneten Körper  $K$ .
- (a) Folgern Sie aus den Anordnungsaxiomen: Für jedes  $a \in K$  mit  $a \neq 0$  gilt  $a^2 > 0$ . (2 Punkte)
- (b) Zeigen Sie:  $1 > 0$ . (1 Punkt)

3. (**Kürzen in Summen**) In der Schule wird das Kürzen in Summen verboten. Summenkürzer werden mit Sprüchen wie “Aus Summen kürzen nur die Dummen” diskriminiert.

Doch kann man das vermeiden, indem man die richtigen Aufgaben wählt<sup>1</sup>: Lässt man etwa  $\frac{(7+4)}{(3 \cdot 7+12)}$  vereinfachen, so kriegen die Summenkürzer  $\frac{(1 \cdot 7+4)}{(3 \cdot 7+12)} = \frac{(1+4)}{(3+12)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$  heraus, was richtig ist. Andere Beispiele sind  $\frac{3 \cdot 7+2}{6 \cdot 7+4}$  oder  $\frac{3 \cdot 5+2}{6 \cdot 5+4}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass in den letzten beiden Beispielen ein beliebiges  $x \in \mathbb{Z}$  statt 7 oder 5 eingesetzt werden kann, ohne Summenkürzer zu verunsichern. (1 Punkt)
- (b) Untersuchen Sie allgemein, wann man im Ausdruck  $\frac{ax+y}{bx+z}$  das  $x$  “kürzen” kann, wann also  $\frac{ax+y}{bx+z} = \frac{a+y}{b+z}$  für  $x \neq 0$  gilt. Betrachten Sie hierfür, für welche  $a, b, x, y, z$  die Division möglich ist, und bestimmen Sie  $z$  so, dass das “Kürzen” klappt. (3 Punkte)

---

<sup>1</sup>Dies ist natürlich nicht als ernst gemeinter didaktischer Hinweis zu verstehen. Im Gegenteil ist es schwer von der Falschheit einer Rechnung zu überzeugen, wenn “doch das Ergebnis stimmt”. Allerdings sieht man hier einmal, wie die berühmten “zufällig richtigen” Ergebnisse nach falscher Rechnung zustande kommen können.