KLAUSUR

Mathematik I für Mechatroniker

01. 09. 2005

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 16 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. **(9P)** Man bestimme die Maximalstelle x_M der Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, welche durch
$$f(x) = x\, e^{-x}$$
gegeben ist, ihren Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ sowie den Wendepunkt x_W. Geben Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt an und skizzieren Sie f.

2. **(9P)** Man bestimme eine Stammfunktion für
$$f(x) = \sin(e^x)\, e^{2\,x}\,.$$
Hinweis: Substitution von $t = e^x$ in $\int f(x)dx$, dann Produktintegration (partielle Integration).

3. **(8P)** Seien a, b_1, b_2 beliebige reelle Zahlen. Welche Lösungen besitzen folgende Gleichungssysteme:
(a)
$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & a\,x_2 & = & b_1\,, \\ -5\,x_1 & - & 2\,x_2 & = & b_2\,. \end{array}$$
(b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & = & b_1\,, \\ 6\,x_1 & + & 6\,x_2 & - & 9\,x_3 & = & b_2\,. \end{array}$$
Man interpretiere die Ergebnisse geometrisch.

4. **(8P)** Gegeben sind die komplexen Zahlen $a = -1 - i$ und $b = -1 + i$.
   (a) Man stelle die Zahlen a, b und a^7 in Polarkoordinaten dar und skizziere ihre Lage in der komplexen Ebene.
   (b) Man berechne die Lösungen der Gleichung $z^4 = b$ und skizziere ihre Lage in der komplexen Ebene.

Lösungen

1.) Wir bestimmen die Extremalstelle:

$$f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1-x)\,e^{-x}\;.$$

$$f'(x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x_M = 1\;.$$

Es gilt $f(x_M) = \frac{1}{e}$.

Wir bestimmen den Wendepunkt:

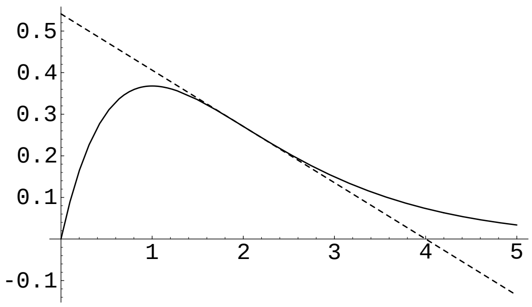
$$f''(x) = (x-2)\,e^{-x}\;.$$

$$f''(x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x_W = 2\;.$$

Es gilt $f(x_W) = \frac{2}{e^2}$. Wegen $f''(x_M) = -\frac{1}{e} < 0$ ist x_M ein Maximum.

Eigenschaften der Exponentialfunktion liefern $\lim\limits_{x\to\infty} x\,e^{-x} = 0$, und die Tangente am Wendepunkt ergibt sich zu

$$t(x) = f(x_W) + f'(x_W)\,(x - x_W) = \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2}(x-2) = \frac{1}{e^2}(4-x)\;.$$



Die Funktion $f(x) = x\,e^{-x}$
mit Tangente am Wendepunkt

2.) Sei $f(x) = \sin(x)\,e^{2x}$. Dann folgt aus der Substitution $t = e^x$ die Regel $dt = e^x\,dx$ und daher

$$\int \sin(e^x)\,e^{2\,x}\,dx = \int t\,\sin t\,dt\;.$$

Mit partieller Integration folgt weiter $u(t) = t, v'(t) = \sin t$, also $u'(t) = 1$ und $v(t) = -\cos t$, schließlich

$$\int t\,\sin t\,dt = -t\,\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \sin t\;.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int \sin(e^x)\, e^{2\,x}\, dx = \sin(e^x) - e^x\ \sin(e^x)\,.$$

3.a) Wir lösen das System mit dem Gaußschen Algorithmus:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{(I)} & x_1 & - & a\,x_2 & = & b_1\,, \\ \text{(II)} & -5\,x_1 & - & 2\,x_2 & = & b_2\,. \end{array}$$

Erster Schritt:

$$\begin{array}{lrcrcll} \text{(I,1)} & x_1 & - & a\,x_2 & = & b_1\,, & \\ \text{(II,1)} & 0 & - & (5\,a+2)\,x_2 & = & 5\,b_1 + b_2\,. & \text{(II)} + 5\,\text{(I)} \end{array}$$

Zweiter Schritt:

$$\text{(A)}: \quad a \neq -\frac{2}{5}\,, \quad \text{(B)}: \quad a = -\frac{2}{5}\,.$$

(A):

$$\begin{array}{lrcrcll} \text{(I,2)} & x_1 & - & a\,x_2 & = & b_1\,, & \\ \text{(II,2)} & 0 & + & x_2 & = & -\frac{5\,b_1+b_2}{5\,a+2}\,. & -\frac{1}{5\,a+2}\,\text{(II,2)} \end{array}$$

Das System ist eindeutig lösbar:

$$x_2 = -\frac{5\,b_1 + b_2}{5\,a+2}\,, \quad x_1 = -\frac{2\,b_1 + a\,b_2}{5\,a+2}\,.$$

Es liegen zwei sich schneidende Geraden in der Ebene vor.
(B): Das System lautet:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{(I,2)} & x_1 & + & \frac{2}{5}\,x_2 & = & b_1\,, \\ \text{(II,2)} & 0 & + & 0 & = & 5\,b_1 + b_2\,. \end{array}$$

(B1): $5\,b_1 + b_2 = 0$. Das System besteht nur aus einer Gleichung:

$$x_1 - a\,x_2 = b_1$$

und besitzt folgende Lösungen:

$$x_2 = \lambda\,, \quad x_1 = a\,\lambda + b_1\,,$$

mit beliebigem λ.
Es liegen zwei zusammenfallende (identische) Geraden in der Ebene vor.
(B2): $5\,b_1 + b_2 \neq 0$. Das System besitzt keine Lösung.
Es liegen zwei parallele, nicht zusammenfallende Geraden in der Ebene vor.
3.b)

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{(I)} & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & = & b_1\,, \\ \text{(II)} & 6\,x_1 & + & 6\,x_2 & - & 9\,x_3 & = & b_2\,. \end{array}$$

Wir gehen nach dem Gaußschen Algorithmus vor.

$$\begin{array}{rrcrcrcll} \text{(I,1)} & x_1 & + & x_2 & - & \frac{3}{2}\,x_3 & = & \frac{b_1}{2}\,, & \frac{1}{2}\,\text{(I)} \\[2ex] \text{(II,1)} & 6\,x_1 & + & 6\,x_2 & - & 9\,x_3 & = & b_2\,. & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrcll} \text{(I,2)} & x_1 & + & x_2 & - & \frac{3}{2}\,x_3 & = & \frac{b_1}{2}\,, & \\[2ex] \text{(II,2)} & 0 & + & 0 & + & 0 & = & -3\,b_1 + b_2\,, & \text{(II,1)} - 4\,\text{(I,1)} \end{array}$$

Falls $b_1 = \dfrac{b_2}{3}$ besteht das System nur aus einer einzigen Gleichung. Wir bekommen dann folgende Lösungen mit beliebigem $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$x_3 = \lambda_3\,, \quad x_2 = \lambda_2\,, \quad x_1 = \frac{b_1}{2} - \lambda_2 + \frac{3}{2}\,\lambda_3\,.$$

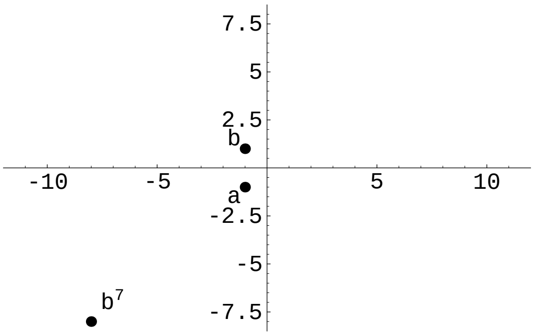
Es liegen zwei parallele, zusammenfallende Ebenen im Raum vor.

Falls $b_1 \neq \dfrac{b_2}{3}$ endet der Gaußsche Algorithmus mit einem Widerspruch. Das System besitzt keine Lösung.
Es liegen zwei parallele, nicht zusammenfallende Ebenen im Raum vor.
4.)
(a) Es gilt offenbar:

$$a = \sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{4}\,\pi\,i}\,, \quad b = \sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\,\pi\,i}\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a^7 &= (\sqrt{2})^7\,e^{-\frac{21}{4}\,\pi\,i} \\ &= 2^3\,\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\,\pi\,i}\,e^{-6\,\pi\,i} \\ &= 8\,\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\,\pi\,i} \\ &= 8\,b = -8 + 8i\,. \end{aligned}$$



Die Zahlen
$a = -1 - i$, $b = -1 + i$ und a^7
in der Gaußschen Ebene

(b) Die Gleichung

$$z^4 = \sqrt{2}\; e^{\frac{3}{4}\,\pi\, i}$$

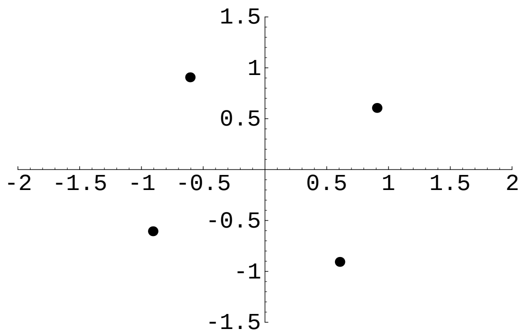
besitzt folgende vier Lösungen:

$$z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\, e^{\frac{3}{16}\,\pi\, i + k\,\frac{2}{4}\,\pi}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Das heißt:

$$z_k = 2^{\frac{1}{8}}\; e^{\frac{3}{16}\,\pi\, i + k\,\frac{1}{2}\,\pi}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

mit $|z_k| = \sqrt[8]{2} \approx 1.09051$ und $\arg(z_0) = \frac{3}{16}\pi = 33{,}75°$.



Die vier Lösungen der Gleichung
$z^4 = -1 + i$
in der Gaußschen Ebene