

KLAUSUR

Mathematik I/II für Elektrotechniker

20. Februar 2003

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr.:
-------	----------	------------

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben
und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sind 25 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)	6)
----	----	----	----	----	----

Punkte:	Note:
---------	-------

1. **(10P)** Im \mathbb{R}^3 seien die Geraden g durch die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie h durch die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Parameterdarstellungen der gegebenen Geraden, also $\vec{v}_0, \vec{v}, \vec{w}_0, \vec{w}$ mit

$$g : \vec{x} = \vec{v}_0 + s \vec{v}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$h : \vec{x} = \vec{w}_0 + t \vec{w}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Zeigen Sie: Die Geraden g und h sind windschief, das heißt weder parallel noch haben sie gemeinsame Punkte.
- (c) Finden Sie einen Vektor \vec{n} der Länge 1, welcher sowohl auf \vec{v} als auch auf \vec{w} senkrecht steht.
- (d) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g und h .
2. **(8P)** Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

- (a) Finden Sie die vollständige Lösung des Gleichungssystems mit dem Gaußschen Algorithmus.
- (b) Geben Sie eine Basis des Kerns der linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

an. *Hinweis:* Verwenden Sie (a).

3. **(8P)** Die Funktion $f : [0, \infty)$ sei gegeben durch $f(x) = x e^{-x}$.
Man bestimme Maximum und Minimum dieser Funktion sowie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und skizziere den Graphen. Geben Sie jeweils den Lösungsweg an!
Für welche $y \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $f(x) = y$ Lösungen? Wie viele Lösungen gibt es?

4. **(10P)** Sei

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2}.$$

Man bestimme die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

zeige, dass $f(x)$ eine ungerade Funktion ist, d. h. $f(-x) = -f(x)$, und skizziere den Graphen der Funktion $f(x)$.

Man bestimme für $x > 0$ die Stammfunktion

$$\int f(x) dx.$$

(Hinweis: Bei dem unbestimmten Integral $\int \frac{1}{e^x - 1}$ verwende man die Substitution $x = \ln t$.)

5. **(8P)** Man berechne das Taylorpolynom 5. Grades der Funktion

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Zwei Sonderpunkte erhält, wer die Taylorreihe angeben kann.

6. **(8P)**

Man bestimme das Schnittvolumen der beiden Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + z^2 = 1$.

Lösungen:

1. (a): Als Ortsvektoren nehmen wir einen der gegebenen definierenden Punkte, als Richtungsvektoren dienen die Differenzen der definierenden Punkte:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

(b): Das Kreuzprodukt \vec{u} der Richtungsvektoren \vec{v} und \vec{w} verschwindet nicht:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daher sind sie linear unabhängig: g und h sind nicht parallel.

Ein $\vec{x} \in g \cap h$ muß beiden Geradengleichungen genügen, dann muss es also s, t mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

geben. Aus der dritten Zeile folgt $t = 1$, damit ergibt sich aus der ersten Zeile $s = -1$ aber aus der zweiten $s = +1$, ein Widerspruch. Die Geraden schneiden sich also nicht. Damit sind g, h windschief zueinander.

(c): Einen Vektor \vec{u} , senkrecht auf beiden Richtungsvektoren, haben wir bereits in (b) ausgerechnet, dieser ist nur noch zu normieren:

$$\vec{n} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(d): Um den Abstand der Geraden zu bestimmen, verwenden wir die Formel aus der Vorlesung:

$$d = \left| \vec{n} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \vec{0} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{\sqrt{6}} \approx 0,8165.$$

2. (a): Wir müssen das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

lösen. Zwei Gaußumformungen bringen dieses System in Zeilenstufenform: von der zweiten das doppelte der ersten Zeile abziehen. Anschließend von der dritten die zweite Zeile subtrahieren:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Die dritte Zeile enthält keine Aussage, der Rang unserer Abbildung ist also 2.

Wir erhalten also für beliebiges $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

$$x_2 = \frac{4}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4$$

und

$$x_1 = -2x_3 + x_4.$$

In Vektorform haben wir schließlich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} 2x_4.$$

(b): Das Bild von φ ist nach (a) zweidimensional und somit auch der Kern, denn die Summe der Dimensionen muß die Dimension des \mathbb{R}^4 sein.

Nach (a) lösen die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ das Gleichungssystem und

liegen somit im Kern. Aus den letzten beiden Komponenten kann man ablesen, dass die gefundenen Elemente des Kerns linear unabhängig sind, also haben wir

mit $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des Kerns gefunden!

3. Für $f(x) = x e^x$ erhalten wir $f'(x) = (1 - x) e^{-x}$ und $f''(x) = (x - 2) e^{-x}$. Also liegt genau an der Stelle $x_1 = 1$ ein lokales Extremum vor, welches wegen $f''(1) = -\frac{1}{e} < 0$ ein Maximum ist. Übrigens liegt an der Stelle $x_2 = 2$ ein Wendepunkt. Es gilt $f(0) = 0$, und für $x \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0.$$

Somit hat f Werte zwischen dem Minimum $f(0) = 0$ und dem Maximum $f(1) = \frac{1}{e}$, welche wegen der Stetigkeit alle angenommen werden (Zwischenwertsatz).

Daher besitzt die Gleichung $f(x) = y$ nur dann Lösungen, wenn $y \in [0, \frac{1}{e}]$, und zwar genau eine für $y = 0$ und für $y = \frac{1}{e}$, sonst genau zwei.

Die Funktion

$$f(x) = x e^{-x}$$

für $x \geq 0$

4. Mit der Regel von de l'Hospital gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x e^x + e^x - 1} - \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Genauso bekommt man:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Mit der Umformung

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$$

sieht man, dass f ungerade ist:

$$f(-x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -f(x)$$

und daher

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2}$$

Die Substitution $x = \ln t$ ($x > 0, t > 1$) ergibt:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x - 1} dx &= \int \frac{1}{t-1} \frac{1}{t} dt \Big|_{t=e^x} \\ &= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt \Big|_{t=e^x} \\ &= \ln(t-1) - \ln t \Big|_{t=e^x} \\ &= \ln(e^x - 1) - x. \end{aligned}$$

Also für $x > 0$:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2} \right) dx &= \ln x - \ln(e^x - 1) + x - \frac{x}{2} \\ &= \ln \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

5. Wir erhalten für $f(x) = \sqrt{1+x}$ nacheinander

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}, \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16(1+x)^{7/2}}, \\ f^{(5)}(x) &= \frac{105}{32(1+x)^{9/2}}, \end{aligned}$$

und somit

$$f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{1}{4}, f'''(0) = \frac{3}{8}, f^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}, f^{(5)}(0) = \frac{105}{32},$$

so dass wir für das Taylorpolynom erhalten

$$\sum_{k=0}^5 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5.$$

Per Induktion erhält man

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) (1+x)^{\frac{1}{2}-k}$$

und somit

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\frac{1}{2}}{k},$$

wobei

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

der Binomialkoeffizient ist. Daher ist die gesuchte Taylorreihe gegeben durch

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k.$$

6. Das gesuchte Volumen V ergibt sich zu

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \, dy \, dx \\ &= 8 \int_0^1 (1-x^2) \, dx = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$