

# KLAUSUR

Mathematik II (Informatiker)

13.3.2006

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch- Nr.:
-------	----------	------------------------	------------------

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)
----	----	----

Punkte:	Note:
---------	-------

**Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.  
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.**

**Geben Sie alle Rechenschritte an!**

1. Eine lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ( $f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$ ), wird festgelegt durch folgende Vorgaben:

$$f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_2) = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Dabei sind  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ , die kanonischen Basisvektoren des  $\mathbb{R}^3$ .

Welches Bild besitzt der Vektor  $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$  bzw. der Vektor  $\vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$  unter der Abbildung  $f$ ?

Wie lautet die Matrix von  $f$  bezüglich der kanonischen Basis des  $\mathbb{R}^3$ ?

2. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

( $a, b, c_1, c_2, c_3$  sind beliebig gewählte reelle Zahlen).

Unter welcher Bedingung ist das System eindeutig lösbar?

Unter welcher Bedingung ist das System nicht lösbar?

Unter welcher Bedingung ist das System lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?

Wie groß ist jeweils der Rang der Systemmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}?$$

3. Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Geben Sie eine Matrix  $B$  an, sodass die Matrix  $B^{-1} A B$  eine Diagonalmatrix wird. Welche Diagonalmatrix ergibt sich?

## Lösungen

1) Wir bekommen:

$$f(\vec{a}) = f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_2) = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (-2, 3, -2)$$

und

$$f(\vec{b}) = f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (2, 2, -1).$$

Die Matrix von  $f$  lautet:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Wir formen um mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 - 2a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_2 - ac_1 \end{pmatrix}$$

Das System ist eindeutig lösbar, genau dann wenn  $a \neq 1$ .

Das System ist nicht lösbar, genau dann wenn  $a = 1$  und  $c_2 \neq c_1$ .

Das System ist lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, genau dann wenn  $a = 1$  und  $c_2 = c_1$ . Der Rang der Systemmatrix beträgt im ersten Fall: 3 und in den beiden anderen Fällen: 2.

3) Die Matrix  $A$  besitzt das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 1$$

und die Eigenwerte:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 2$ .

Eine Basis des Eigenraums von  $\lambda_1$  ergibt sich aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu  $(1, -1)$ .

Eine Basis des Eigenraums von  $\lambda_2$  ergibt sich aus:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu  $(1, 1)$ .

Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

überführt  $A$  in die Diagonalmatrix:

$$B^{-1} A B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Es ist  $B^{-1} = B^T$ ).