Aufgabe 1

Sind die jeweiligen 3 Vektoren linear unabhängig? Benutzen Sie wenn möglich den Gauß-Algorithmus.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (b) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Man schreibe den Vektor $\begin{pmatrix} 3-i \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid ix - 2y + z = 0, \quad x, y, z \in \mathbb{C} \right\}$$

einen Unterraum des $\mathbb{C}^3$ bildet und geben Sie eine Basis sowie die Dimension von F an.

(b) Ist die folgende Teilmenge ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$?

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 2x + y = 5, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

(a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass unter der Annahme $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$, x und y Lösungen des folgenden Gleichungssystems S sind.

$$\begin{aligned} x \cos \alpha - y \sin \alpha &= \cos \beta \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha &= \sin \beta \end{aligned}$$

(ii) Lösen Sie S und benutzen Sie die Additionstheoreme, um die Lösung zu vereinfachen.

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos(\phi + \psi) &= \cos(\phi) \cos(\psi) - \sin(\phi) \sin(\psi) \\ \sin(\phi + \psi) &= \sin(\phi) \cos(\psi) + \cos(\phi) \sin(\psi). \end{aligned}$$

(iii) Sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig?

(iv) Schreiben Sie S in Matrixform $A(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$.

(Bitte wenden)

(v) Berechnen Sie das Matrizenprodukt $A(\alpha)A(\beta)$ und benutzen Sie wieder die Additionstheoreme, um das Ergebnis zu vereinfachen.

(b) Kann man den Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}$, als Linearkombination der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und

$\vec{w} = \begin{pmatrix} i \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ schreiben? (Benutzen Sie dafür den Gauß-Algorithmus)

Das Lineare Algebra-Team wünscht Ihnen allen ein gesegnetes Weihnachtsfest, einen guten Rutsch ins neue Jahr 2011 und ein fröhliches Wiedersehen am 10. Januar!

Abgabetermin: Montag, 10.01.2011 um 10:15 Uhr vor dem Beginn der Vorlesung im Hörsaal.

WICHTIG: Aufgabe 4 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Geben Sie auf jedem Blatt Ihren **Namen, Vornamen, Matrikelnummer, Studiengang** sowie Ihre **Gruppennummer** an. Weitere Informationen auf http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Elektrotechnik/lin_alg-WS10.html