

Übungsblatt 13

Aufgabe 1

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Man berechne das charakteristische Polynom von A und bestätige den Satz von Cayley-Hamilton.
- (b) Man berechne die Potenzen A^n , ($n \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 2

Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 3 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Man berechne

- (a) das charakteristische Polynom von B (Hinweise: Entwicklung nach der zweiten Zeile).
- (b) die Eigenwerte und Eigenvektoren von B .

Aufgabe 3

Gegeben sei die folgende Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Man berechne das charakteristische Polynom von C .
- (b) Ist die Matrix C in $\mathbb{C}$ diagonalisierbar? **(Es genügt in diesem Fall nur die Kenntnis, dass die Eigenwerte alle voneinander verschieden sind).**

Aufgabe 4 (10 Punkte)

- (a) Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Man benutze den Satz von Cayley-Hamilton um A^{10} zu berechnen.
- (ii) Man beweise durch Induktion, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^{n-1} & 2 \cdot 5^{n-1} \\ 2 \cdot 5^{n-1} & 4 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

(bitte wenden)

(b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2+\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

(i) Man berechne

(I) das charakteristische Polynom von A_α (Hinweise: Entwicklung nach der zweiten Zeile).

(II) die Eigenwerte und Eigenvektoren von A_α .

(ii) Für welche reellen α ist A_α in $\mathbb{C}$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabetermin: Montag, 14.02.2011 um 10:15 Uhr vor dem Beginn der Vorlesung im Hörsaal.

WICHTIG: Aufgabe 4 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Geben Sie auf jedem Blatt Ihren **Namen, Vornamen, Matrikelnummer, Studiengang** sowie Ihre **Gruppennummer** an. Weitere Informationen auf http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Elektrotechnik/lin_alg-WS10.html