

Übungsblatt 3

**A7:** Die Taylorreihe der Funktion  $(1+x)^\alpha$  ergibt sich zu

$$f_\alpha(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

wobei  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$  der Binomialkoeffizient ist.

Berechnen Sie das Cauchyprodukt  $f_\alpha(x) \cdot f_\beta(x)$  und erläutern Sie das Resultat.

**A8:** Die sogenannte Fehlerfunktion („error function“) ist erklärt durch

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Bestimmen Sie die Taylorreihe von  $\operatorname{erf}(x)$  um den Ursprung.

**A9:** Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ .

Bestimmen Sie die Grenzwerte von  $f(x, y)$  für  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  entlang der Geraden  $y = mx$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

Wie groß ist der Grenzwert für  $m = 2$  bzw.  $m = 3$ ?

**A10:** Sei  $f(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)}$

(a) Beschreiben Sie den Graphen von  $f$ .

(b) Welche Form haben die Schnitte des Graphen mit den Ebenen, welche die  $z$ -Achse enthalten?

**L8:** Berechnen Sie die Inverse  $A^{-1}$  der Matrix aus Aufgabe L3:

$$A = \begin{pmatrix} a & i & 1 \\ 1 & 1 & i \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**L9:** Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y - z &= 2 \\ x - y + 2z &= 1 \\ 4y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

mit dem Gaußschen Algorithmus. Welchen Rang hat die Koeffizientenmatrix?

**L10:** Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^3 + 4x + 2}{x^4 - 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}. \quad (1)$$

Lösen Sie hierfür das lineare Gleichungssystem für  $A, B, C$  und  $D$ , welches sich durch Koeffizientenvergleich der Zähler in (1) ergibt, mit dem Gaußschen Algorithmus.