Prof. Dr. Wolfram Koepf **Mathematik II** **11.06.2002**
SS 2002

Übungsblatt 8

L23: Die Matrix $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ gehört zu einer Spiegelung an einer Ebene E durch O im $\mathbb{R}^3$. Begründen Sie:

- Dann ist die Ebene E der Eigenraum zum Eigenwert 1 von S.
- Der Normalvektor zu E ist ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 .

Bestimmen Sie die Ebene E, in der „der Spiegel liegt“.

L24: Bestimmmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

L25: Bestimmen Sie jeweils die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte der Matrizen aus Aufgabe L21.

A24: Es wird nach der Form gesucht, die eine quaderförmige oben geöffnete Schachtel mit quadratischer Grundfläche haben muss, für die möglichst wenig Material verbraucht wird. Es ist also bei gegebenem Volumen $V = x^2 y$ des Quaders mit Grundseite x und Höhe y die Oberfläche $O = x^2 + 4xy$ zu minimieren. Verwenden Sie die Lagrange-Methode, und versuchen Sie, λ zu eliminieren. Beschreiben Sie die Form der Schachtel in Worten.

A25: Gegeben sei die implizite Funktion $y(x)$ durch die Gleichung

$$F(x, y) = xy - (1-y)^2 = 0 . \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie durch Auflösen nach y eine explizite Darstellung von $y(x)$. Wie viele Zweige gibt es?

(b) Bestimmen Sie die Ableitung $y'(x)$ aus der expliziten Darstellung. Wie groß ist $y'(2)$?

(c) Bestimmen Sie die Ableitung $y'(x)$ durch explizites Differenzieren von (1) . Berechnen Sie wieder $y'(2)$.

(d) Bestätigen Sie die Rechnung in (c) mit der Ableitungsformel aus der Vorlesung

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} .$$

A26: Bestimmen Sie das Integral

$$\int\limits_{[-2,2]\times[-1,1]} x^2 y^4 \, d(x, y)$$

iterativ auf zwei verschiedene Arten.