

Übungszettel 10

57. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden elementaren Funktionen:

- (a) $f(x) = \cot x$
- (b) $g(x) = \arctan x$
- (c) $h(x) = \operatorname{arsinh} x$

58. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{1 - \cos x}$,
- (c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$; $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

59. Gegeben sei $f(x) = x^3 - x$ und das Intervall $I = [a, b]$ mit $a < 0$. Für welche Intervallgrenzen $b > a$ gibt es beim Mittelwertsatz genau ein $\xi \in (a, b)$ und für welche mehrere solcher Werte? Verdeutlichen Sie dies geometrisch.

60. (a) Bestimmen Sie

$$I = \int_{-3}^3 e^{-x^2} dx$$

durch Rechteckapproximationen mit $\Delta x = 0,2$.

Geben Sie eine obere und eine untere Schranke für I . Wie groß ist I^2 ? Was vermuten Sie?

(b) Die Kreiszahl π kann als Flächeninhalt des Einheitskreises bestimmt werden. Dies kann aber nur schwer approximiert werden. Warum? Besser ist es,

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx$$

zu bestimmen. Wie hängt I mit π zusammen? Zeichnen Sie! Approximieren Sie I und damit π mit $\Delta x = 0,1$.

61. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 2x + y + 3z + u \\ x + z + u \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie den Kern von φ .