Prof. Dr. Wolfram Koepf **Mathematik I** **20.11.2001**
WS 2001/2002

Übungszettel 4

19. Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden

$$g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$h: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

20. Zeigen Sie die folgende Beziehung zwischen den Diagonallängen d_1 und d_2 und den Seitenlängen a_1 und a_2 eines beliebigen Parallelogramms:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\,(a_1^2 + a_2^2)\,.$$

Diese Gleichung heißt Parallelogrammgleichung.

21. Bringen Sie die komplexe Zahl

$$z = \frac{(1+i)\,(2-3i)}{(4-6i)\,(1+2i)}$$

in Normalform.

22. Berechnen Sie die dritte Potenz z^3 von $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$.

23. Bearbeiten Sie die folgende Aufgabe – bzw. am besten alle Aufgaben – in kleinen Gruppen, welche jeweils über entweder einen graphischen Taschenrechner oder über ein geeignetes Computerprogramm verfügt.

    (a) Zeichnen Sie die Graphen der Polynome

    $$f_n\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \tag{1}$$

    im Intervall $[-1,\, 1]$ für $n = 0,\, 1,\, 2,\, 3$ und 4.

    (b) Zeigen Sie die Ungleichung $\frac{1}{k!} \le \left(\frac{1}{2}\right)^k$ für $k \ge 4\,.$

    (c) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge $f_n\,(x)$ aus (1) an der Stelle $x = 1$ für $n \to \infty$, d.h. die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)\,.$

24. Betrachten Sie wieder die Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ aus der Vorlesung, für die wir gezeigt hatten

$$b_{k+1} - b_k = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}} \qquad (k \in \mathbb{N})\,. \tag{2}$$

Summieren Sie die Gleichung (2) für $k = 1, \ldots, n$ und bestimmen Sie hieraus den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1}\,.$

25. Man zeige, dass die rekursiv erklärte Folge

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}\,, \qquad a_1 = \frac{1}{4}$$

konvergiert, und bestimme ihren Grenzwert.