Prof. Dr. Wolfram Koepf **Mathematik I** **08.01.2002**
WS 2001/2002

Übungszettel 9

51. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Tangentialebene an die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

an der Stelle $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ bzw. an der Stelle $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

52. Sei $V = P_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leqq 2$. Wir erklären das Skalarprodukt

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \sum_{k=0}^{2} f(k) \cdot g(k) \ .$$

Orthogonalisieren Sie die Basis $\langle 1, x, x^2 \rangle$ und erzeugen Sie – beginnend mit dem konstanten Polynom $f_0(x) = 1$ – ein Polynom $f_1(x)$ vom Grad 1, welches orthogonal zu $f_0(x)$ ist, sowie ein Polynom $f_2(x)$ vom Grad 2, welches orthogonal zu $f_0(x)$ und $f_1(x)$ ist. Wählen Sie $f_1(x)$ und $f_2(x)$ so, dass die führenden Koeffizienten jeweils 1 sind.

Bei Erfolg haben Sie eine Familie diskreter Chebyshev-Polynome berechnet.

53. Die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ seien im Intervall I differenzierbar.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von $u(x)^{v(x)}$.

(b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Ableitungen für a^x und x^a .

54. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^x$ für $x \in (0, \infty)$.

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

(b) Finden Sie das Minimum von f .

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f .

55. Gegeben sei für $x \in (0, \infty)$ die Funktion

$$f(x) = (x^2 - 3\,x + 2)\, e^{-x} \ .$$

Führen Sie eine Kurvendiskussion durch.

56. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \sin \sqrt{1 - x^2}$ und bestimmen Sie ihre Ableitung.