Klausur Lineare Algebra II

Prof. Wolfram Koepf

Sommersemester 2004, 28.07.2004

Vorname, Name	
Matrikelnummer	
Fachsemester	
Studiengang	

1 Fragen

[10]

	Frage	Ja	Nein
1.	Jeder euklidische Vektorraum hat eine Orthonormalbasis.	☒	☐
2.	Der Typ einer Quadrik $$x^T Ax + b^T x + c = 0$$ hängt nur von A ab.	☐	☒
3.	Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$. Dann gibt es genau einen eindimensionalen Unterraum U von V, so dass $U = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{n-1})^\perp$.	☐	☒
4.	Ist $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ und zerfällt P_A in n verschiedene Linearfaktoren, so ist A diagonalisierbar	☒	☐
5.	Ist $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ symmetrisch und $T \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ eine Matrix mit $$T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$ so sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A.	☐	☒
6.	Ist S die Menge der Eigenwerte einer Matrix A, so gilt $$\Big(\det A = \prod_{\lambda \in S} \lambda\Big) \iff \big(\forall \lambda \in S:\ \mu(P_A, \lambda) = 1\big).$$	☐	☒
7.	Sei $F \in \operatorname{End}(V)$ und λ ein Eigenwert. Es gilt $\operatorname{Eig}(F, \lambda) = \operatorname{Kern}(F - \lambda \operatorname{id})$.	☒	☐
8.	Ist $\mathbb{K}$ ein Körper mit $q \in \mathbb{N}$ Elementen und V ein $n \in \mathbb{N}$-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, so hat V gerade q^n Elemente.	☒	☐
9.	Haben zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ keinen Schnittpunkt, so sind sie windschief.	☐	☒
10.	Es gilt $\dim \operatorname{Hom}(V, W) = \dim(V) + \dim(W)$.	☐	☒

2 Rechenaufgaben

Aufgabe 1 (Quadriken): Gegeben sei die Quadrik

$$\frac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + 1 = 0.$$

a. Berechne die Normalform. [8]

Lösung: Setzen wir $A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b := \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$ und $c := 1$, so ist obige Quadrik äquivalent zu

$$x^T \cdot A \cdot x + 2b^T \cdot x + c = 0. \tag{1}$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ mit zugehörigen normierten Eigenvektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$.

Setzen wir nun $T := (v_1, v_2)$, so ist $T^T A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, und mit den Substitutionen $y := T^T x$ und $\tilde{b} := T b = \binom{-\frac{1}{2}}{1}$ ist (1) nun äquivalent zu

$$y^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y + 2\tilde{b}^T x + c = y_1^2 + 2y_2^2 - 2\left(\frac{1}{2}y_1\right) + 2y_2 + 1 = 0. \tag{2}$$

Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir die zu (2) äquivalente Bedingung

$$(y_1 - 1)^2 - \frac{1}{4} + 2(y_2 + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (y_1 - 1)^2 + 2(y_2 + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} = 0.$$

Dies ist die Normalform. ■

b. Welche Form hat die Quadrik? [2]

Lösung: Die Quadrik leer, da kein Punkt $\binom{y_1}{y_2}$ die Gleichung erfüllt. ■

[10]

Aufgabe 2 (Bilinearformen): Sei V ein $n \in \mathbb{N}$-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $f, g \in \operatorname{End}(V)$ und σ eine Bilinearform auf V.

a. Zeige: Durch

$$\sigma_f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \sigma_f(v, w) := \sigma(f(v), w)$$

wird eine Bilinearform auf V definiert. [2]

Lösung: Die Linearität im zweiten Argument ist klar. Bleibt nur die Linearität im ersten Argument zu zeigen: Seien also $u, v, w \in V$. Dann ist

$$\sigma_f(u+v, w) = \sigma(f(u+v), w) \overset{*}{=} \sigma(f(u) + f(v), w) \overset{**}{=} \sigma(f(u), w) + \sigma(f(v), w) = \sigma_f(u, w) + \sigma_f(v, w),$$

an der Stelle $*$ wurde die Linearität von f, an der Stelle $**$ die Linearität von σ im ersten Argument benutzt. Sei nun $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\sigma_f(\lambda u, w) = \sigma(f(\lambda u), w) = \sigma(\lambda f(u), w) = \lambda\sigma(f(u), w) = \lambda\sigma_f(u, w).$$

■

b. Zeige: Ist σ nicht ausgeartet (also der Ausartungsraum $V_0 = \{0\}$), so folgt aus $\sigma_f = \sigma_g$ bereits $f = g$. [4]

Lösung: Hier benutzen wir (c). Seien A die darstellende Matrix zu σ und B, C die Darstellungsmatrizen zu f bzw. g. Dann bedeutet $\sigma_f = \sigma_g$ gerade $B^T A = C^T A$. Ist σ nicht ausgeartet, so ist A invertierbar, und durch Multiplikation mit A^{-1} von rechts erhalten wir $B = C$ und damit $f = g$.

Alternativ: Ist $\sigma_f = \sigma_g$, so ist für $u, v \in V \setminus \{0\}$

$$0 = \sigma_f(u, v) - \sigma_g(u, v) = \sigma(f(u), v) - \sigma(g(u), v) = \sigma(f(u) - g(u), v),$$

und da σ nicht ausgeartet ist folgt $f(u) = g(u)$ und damit $f = g$. ■

c. Sei A die darstellende Matrix von σ und B die darstellende Matrix zu f. Berechne die darstellende Matrix zu σ_f. [4]

Lösung: Zu $u, v \in V$ sind $f(u) = Bu$ und $\sigma(u,v) = u^T A v$. Demnach ist

$$\sigma_f(u,v) = \sigma(f(u),v) = \sigma(Bu,v) = (Bu)^T A v = (u^T B^T) A v = u^T (B^T A) v,$$

und damit ist $B^T A$ die darstellende Matrix von σ_f. ∎

[10]

Aufgabe 3 (Orthogonalisierung): Sei $v_1 := (7,-1,3)^T \in \mathbb{R}^3$. Bestimme ganzzahlige $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Ortho*gonal*basis des $\mathbb{R}^3$ bildet. [5]

Lösung: Um v_2 zu bestimmen, wähle beispielsweise $x_3 = 0, x_2 = 1$, die Gleichung $(x_1,x_2,x_3) \cdot v = 0$ liefert $x_1 = \frac{1}{7}$. Um ein ganzzahliges Ergebnis zu erhalten, multipliziere alle Komponenten mit 7 und erhalte $v_2 = (1,7,0)^T$. Berechne nun v_3 mit Kreuzprodukt als $v_3 = v_1 \times v_2 = (-21,3,50)^T$. ∎ **[5]**

Aufgabe 4 (Diagonalisierbarkeit): Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar? Wenn nicht, gib die Jordan-Normalform an, wenn ja gib eine Matrix T an, so dass $T^{-1} \cdot A \cdot T$ Diagonalgestalt hat.

a. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ [7]

Lösung: Das charakteristische Polynom ist $P_A = -(\lambda-1)(\lambda-3)^2$. Der Eigenvektor zu 1 ist $v_1 = (0,1,2)^T$, die Eigenvektoren zu 3 sind $v_2 = (1,0,0)^T$ und $v_3 = (0,1,1)^T$. Damit ist $\dim \mathrm{Eig}(A,3) = 2$, und A kann mit der Matrix $T := (v_1, v_2, v_3)$ auf Diagonalgestalt gebracht werden. ∎

b. $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 4 \\ -12 & -1 & -8 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ [8]

Lösung: Das charakteristische Polynom ist ebenfalls $P_A = -(\lambda-1)(\lambda-3)^2$. Der Eigenvektor zu 1 ist $(-1,2,1)^T$, zu 3 gibt es ebenfalls nur einen (linear unabhängigen) Eigenvektor $v_2 = (-2,4,1)^T$. Damit ist $\dim \mathrm{Eig}(A,3) = 1 < 2 = \mu(P_A,3)$, und A ist nicht diagonalisierbar. In der Jordan-Normalform gibt es also nur ein Kästchen zu 3. Damit ist die Jordan-Normalform

$$\begin{pmatrix} 3 & & \\ 1 & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

∎

[15]

Aufgabe 5 (Geometrie im $\mathbb{R}^3$):

a. Berechne den minimalen Abstand der Geraden $x = \binom{1}{2} + \lambda \binom{1}{-2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ vom Nullpunkt. [5]

Lösung: Der Abstand ist zu berechnen durch $d = \frac{|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}|}{\|\binom{1}{-2}\|} = \frac{4}{\sqrt{5}}$. ∎

b. Berechne den minimalen Abstand der Geraden [5]

$$x = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Lösung: Durch einen Fehler in der Aufgabenstellung liegen die nicht-parallelen Geraden in einer Ebene, schneiden sich also. Damit ist der minimale Abstand 0. Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir in die Abstandsformel aus der Vorlesung einsetzen:

$$d = \frac{\left| \left[\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \right] \right|}{\left\| \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\|} = 0.$$

■

[10]

Erreichbare Gesamtpunktzahl: 60
Wir wünschen Euch viel Erfolg!