UNI KASSEL VERSITÄT
Prof. Wolfram Koepf
Peter Horn

Übungen Lineare Algebra II

Blatt 1

SS 2004
26.04.04

Aufgabe 1 (Eigenwerte): Sei $0 \neq A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ eine Matrix. A heisst *nilpotent*, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^m = 0$. A heisst *idempotent*, wenn $A^2 = A$ gilt.

a. Zeige: Ist A nilpotent, so sind alle Eigenwerte 0. [2]

Lösung: Seien λ, v ein Eigenwert und ein Eigenvektor von A und $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$. Dann ist $A^m \cdot v = \lambda^m \cdot v$, andererseits ist $A^m \cdot v = 0 \cdot v$. Da $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Körperelement ist, folgt $\lambda = 0$. ■

b. Zeige: Die Matrix $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist nilpotent. [2]

Lösung: Nachrechnen liefert für die Einträge $b_{i,j}$ von $B := A^2$ gerade $b_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j+2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Damit ist $A^{n-1} = 0$. ■

c. Welche Eigenwerte kommen für idempotente Matrizen in Frage? [2]

Lösung: Seien λ, v ein Eigenwert und ein Eigenvektor von A. Dann ist $A^2 \cdot v = \lambda^2 \cdot v = A \cdot v = \lambda v$. Also muss $\lambda^2 = \lambda$ und damit $\lambda = 1$ für jeden Eigenwert von A gelten. ■

d. Zeige: Ist A singulär, so hat A mindestens einen Eigenwert 0. [2]

Lösung: Sei $v \in \mathrm{Kern}(A)$. Dann ist $A \cdot v = 0$, also ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. ■

e. Charakterisiere den Eigenraum zum Eigenwert 0. [2]

Lösung: Der Kern ist gearde der Eigenraum zum Eigenwert 0. ■

[10]

Aufgabe 2 (Matrizen über Ringen): Wir können auch über einem allgemeinen kommutativen Ring R Matrizen betrachten. Die Definition der Determinante überträgt sich wörtlich.

a. Zeige: Ist $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, R)$, so ist $\det A \in R$. [2]

Lösung: In der Definition der Determinante tauchen nur Additionen und Multiplikationen auf, bezüglich dieser Operationen ist R aber abgeschlossen. ■

b. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Invertierbarkeit von A und $\det A$? [6]

Lösung: Im Beweis der *Cramer'schen Regel* werden nur Determinanten und genau eine Division benötigt, und zwar wird durch die Determinante der Matrix geteilt. Damit ist eine Matrix invertierbar, wenn die Daterminante eine Einheit in R ist. ■

c. Invertiere – wenn möglich – die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}), \qquad B = \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{5} \\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$$

über den entsprechenden Ringen. [2]

Lösung: Die Determinanten sind beide nicht-Einheiten in den entsprechenden Ringen, also sind beide Matrizen nicht invertierbar. ■

[10]

Aufgabe 3 (Skalarprodukt): Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Fixiere ein $v \in V$ und definiere eine Abbildung

$$\lambda_v : V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x \longmapsto \langle v, x \rangle.$$

a. Zeige: λ_v ist linear, was ist die darstellende Matrix zu λ_v? [4]

   Lösung: Nach der Definition des Skalarproduktes ist $\lambda_v(x) = \langle v, x \rangle = v^T \cdot x$, damit ist λ_v eine Abbildung, die durch Multiplikation mit der $1 \times n$-Matrix v^T gegebn ist, und damit linear. ■

b. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ eine Matrix. Zeige: Die Abbildung

$$\lambda_A : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \longmapsto x^T \cdot A \cdot y$$

   ist bilinear. [4]

   Lösung: Nachrechnen, wahlweise: $\lambda_A(x, y)$ ist $\lambda_x(Ay)$, das ist nach oben linear, analoge Argumentation für das erste Argument, hier muss beachtet werden, dass Transponieren eigentlich nicht linear ist, aber Da wir nach $\mathbb{K}^1$ abbilden, macht das keine Probleme. ■

c. Zwei Vektoren $u, w \in V$ heissen *orthogonal*, wenn $\langle u, w \rangle = 0$ gilt. Zeige den Satz des Pythagoras: $\|u\|^2 + \|w\|^2 = \|u - w\|^2$. [2]

   Lösung: $\langle u - w, u - w \rangle = \langle u, u - w \rangle - \langle w, u - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, w \rangle - \langle w, u \rangle + \langle w, w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle$ ■

[10]

Abgabe bis 3. Mai 2004 in den Kästen im zweiten Stock.

[30]