

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 2

1. **Lineare Gleichungssysteme:** Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme.

(a)

$$\begin{aligned} ax_1 + 4x_2 + ax_3 &= 1 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 + ax_2 + 6x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} -ax_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= 0 \\ 2ax_1 + (a+3)x_2 + 3x_3 &= 0 \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. **Funktionen:** Es seien M_1, M_2 und M_3 Mengen und es seien $f : M_1 \rightarrow M_2$ und $g : M_2 \rightarrow M_3$ Abbildungen. Zeigen Sie:

- (a) Sind f und g injektiv, so ist auch die Hintereinanderausführung $g \circ f$ injektiv.
(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.
(c) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

3. **Ebenen im \mathbb{R}^4 :**

- (a) Folgende Gleichungen definieren eine Ebene E im \mathbb{R}^4 . Bestimmen Sie eine Parameterform dieser Ebene

$$E : X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = 2, \quad X_2 + 3X_4 = 4$$

(Ansatz: Wählen sie $X_3 = \lambda, X_4 = \mu$ und stellen Sie den allgemeinen Ebenenvektor mit diesen Parametern dar.)

- (b) Bestimmen Sie die Schnittmenge der Ebenen

$$E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. **Der Gaußsche Algorithmus:** Es seien über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Gleichungssysteme mit der Koeffizientenmatrix A und den rechten Seiten b_1, b_2 . Beschreiben Sie genau die jeweils benutzten Umformungen.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 12.11.2003, 11.00 Uhr in den Fächern im 2. Stock. Geben Sie bitte jede der Aufgaben auf einem separaten Zettel ab, versehen jeweils mit Name und Übungsgruppe.