Prof. Dr. Wolfram Koepf
D. Müller

12.11.2003

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 3

1. **Spaltenumformungen im Gleichungssystem**

   (a) Bestimmen Sie die Lösungen x der Gleichungssysteme $Ax = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ für folgende A:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Was passiert mit dem Lösungsvektor, wenn (wie oben) in A zwei Spalten vertauscht werden? Was, wenn Spalte i der Matrix mit einer Zahl $\lambda \neq 0$ multipliziert wird?

   (c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$. $\tilde{A}$ gehe aus A durch Addieren des λ-fachen der i-ten Spalte zur ersten Spalte hervor. Zeigen Sie:

   löst $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ die Gleichung $Ax = b$, so löst $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i - \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ die Gleichung $\tilde{A}x = b$.

2. **Lösbarkeit von $a + x = b$ als Gruppenaxiom:** Zeigen Sie, daß die drei Gruppenaxiome

   G1: Die Verknüpfung $+$ ist assoziativ (also für alle $x, y, z : (x + y) + z = x + (y + z)$).
   G2: Es gibt ein neutrales Element 0 mit $a + 0 = 0 + a = a$ für alle $a \in G$.
   G3: Zu jedem $x \in G$ gibt es ein Inverses x' mit $x + x' = x' + x = 0$.

   zu folgenden Axiomen gleichwertig sind:

   G0′: G ist nicht die leere Menge.
   G1′: Die Verknüpfung $+$ ist assoziativ.
   G2′: Zu Elementen $a, b \in G$ gibt es stets genau ein x, und genau ein x', die die Gleichungen $a + x = b, x' + a = b$ erfüllen.

3. **Gruppen mit 6 Elementen:** Geben Sie zwei Verknüpfungstabellen an, welche auf der Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ Verknüpfungen $\oplus_1, \oplus_2$ definieren, so daß $G_1 = (M, \oplus_1)$ und $G_2 = (M, \oplus_2)$ Gruppen mit 0 als neutralem Element werden.

   Dabei sollen G_1 und G_2 <u>nicht</u> isomorph sein, weisen Sie dies nach!

   Hinweis: Für eine Gruppe denken Sie an zyklische Gruppen. Für die andere betrachten Sie beispielsweise die Gruppe, die aus den Drehungen und Drehspiegelungen besteht, welche ein gleichseitiges Dreieck in sich überführen. Die Gruppeneigenschaft dieser Menge braucht nicht gezeigt zu werden.

4. **Sind es Gruppen?** Welche der folgenden Paare $(G, \circ)$ bilden eine Gruppe? Geben Sie für die Gruppen das neutrale Element an.

   (a) $G := \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\quad a \circ b := a + b$
   (b) $G := \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\quad a \circ b := a \cdot b$
   (c) $G := \{f \mid f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\}$, $\quad (f \circ g)(n) := f(n) \cdot g(n)$
   (d) $G := \{f \mid f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, f(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{Q}\}$, $\quad (f \circ g)(x) := f(x) \cdot g(x)$

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19.11.2003, 11.00 Uhr in den Fächern im 2. Stock.