Prof. Dr. Wolfram Koepf
D. Müller 19.11.2003

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 4

1. **Äquivalenzrelationen:** Testen Sie für die folgenden Relationen, ob es sich um Äquivalenzrelationen handelt, wenn ja, bestimmen Sie die Äquivalenzklasse des gegebenen Elementes c.

   (a) Auf $\mathbb{Z}$: $a \sim b :\Leftrightarrow 5$ teilt $a+b$; $c = 5$.

   (b) Auf $\{\text{Geraden im } \mathbb{R}^2\}$: $a \sim b :\Leftrightarrow a$ ist parallel zu b $c : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

   (c) Auf $\mathbb{R}^2$: $a \sim b :\Leftrightarrow b = a + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$; $c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. **Restklassenringe:** Auf $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ definieren wir die Multiplikation durch $\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}, a, b \in \mathbb{Z}$.

   (a) Zeigen Sie, daß die Multiplikation auf $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ sinnvoll definiert ist.

   (b) Erstellen Sie Multiplikationstabellen für $\mathbb{Z}/_{9\mathbb{Z}}$ und für $\mathbb{Z}/_{11\mathbb{Z}}$ (Schreiben Sie A für $\overline{10}$).

   (c) Finden Sie, wenn möglich, für beide Ringe ein Element a, so daß die Menge der Potenzen $\{a, a^2, a^3, ...\}$ außer der 0 jedes Ringelement enthält.

3. **Permutationen von fünf Elementen:** Permutationen von fünf Elementen seien in der Form $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ mit $\pi(i) = a_i$ gegeben. Es bezeichne π_{ij} die i und j vertauschende Permutation, etwa: $\pi_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

   (a) Stellen sie die "Rotation" $r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ durch vier Vertauschungen dar.

   Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \pi_{14} \circ \pi_{25} \circ \pi_{34}$.

   (b) Bestimmen Sie für r aus (3a) die Potenzen r^2, r^3, r^4, r^5. Was ist das Inverse von r?

   (c) Zeigen Sie, daß die Menge $\{r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ der Potenzen der Rotation aus (3a) eine Untergruppe der Permutationsgruppe bilden.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 26.11.2003, 11.00 Uhr in den Fächern im 2. Stock.