Prof. Dr. Wolfram Koepf
D. Müller 03.12.2003

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 5

1. **Nullteiler:** Sei $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} := \left\{ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \middle| m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ der Ring der 2-Tupel ganzer Zahlen mit komponentenweiser Multiplikation und Addition.

   (a) R ist ein Ring mit 1. Geben Sie das Null- und das Einselement an (mit Nachweis).

   (b) Hat man $\tau, \varphi \in R, \tau \neq 0, \varphi \neq 0$, aber $\tau\varphi = 0$, so heißen τ und φ Nullteiler.
   Sei $r = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in R$. Geben Sie eine Bedingung an m, n an, die äquivalent damit ist, daß r ein Nullteiler in R ist.

   (c) Beweisen oder widerlegen Sie:
   Die Menge N der Nullteiler bildet eine Gruppe bezüglich "+".

2. **Charakteristik:** Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$,
   das sind die Tupel $\left\{ \begin{pmatrix} \overline{m} \\ \overline{n} \end{pmatrix} \middle| \overline{m} \in \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}, \overline{n} \in \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \right\}$ mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Multiplikation.

   (a) Finden Sie das Einselement und bestimmen Sie die Charakteristik von R.

   (b) Untersuchen Sie, ob es Tupel $r \in R \setminus \{0_R\}$ gibt mit
   $4 \cdot r = 0_R, \qquad 5 \cdot r = 0_R, \qquad 6 \cdot r = 0_R.$
   Wenn ja, reicht ein Beispiel; wenn nein, warum nicht?
   Dabei sei $n \cdot r := \underbrace{r + r + \ldots + r}_{n}$ für $n \in \mathbb{N}, r \in R$ sowie
   $0_R := \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}$ das Nullelement aus R.

   (c) Wenn Sie richtig gerechnet haben, haben Sie keine Primzahl für die Charakteristik herausbekommen. Benutzen Sie dies und einen Satz aus der Vorlesung um zu zeigen, daß R kein Körper sein kann.

3. **Komplexe Zahlen:**

   (a) Bringen Sie folgende Ausdrücke in die Form $x + yi$:
   $$(1+i)^2, \qquad \left(\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2} \right)^3, \qquad \left(\frac{1+2i}{2-i} \right)^{103}.$$

   (b) Zeigen Sie: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ und $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 10.12.2003, 11.00 Uhr in den Fächern im 2. Stock.