Prof. Dr. Wolfram Koepf
D. Müller 10.12.2003

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 6

1. **Unterring, Unterkörper von $\mathbb{C}$:**

   (a) Zeigen Sie: die Teilmenge
   $$R = \left\{ a + bi\sqrt{5} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{C}$$
   ist ein Unterring von $\mathbb{C}$, also nicht leer, abgeschlossen bezüglich "+", "·" und additiver Inversenbildung.[1]

   (b) Zeigen Sie: Die Teilmenge
   $$K = \left\{ a + bi\sqrt{5} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{C}$$
   ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, also nicht leer, abgeschlossen bezüglich "+", "·", additiver und multiplikativer Inversenbildung.

2. **Lineare Unabhängigkeit:**

   (a) Prüfen Sie, ob folgende Zeilenvektoren aus dem $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind:
   $$(1, 0, -1, 0), \qquad (0, 1, 1, 0), \qquad (0, -1, 0, 1), \qquad (-1, 1, 1, -1).$$

   (b) Es seien $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_{>0}$ paarweise verschieden gegeben. Zeigen Sie, daß die Vektoren
   $$\begin{pmatrix} 1 \\ n_1 \\ {n_1}^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ n_2 \\ {n_2}^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ n_3 \\ {n_3}^2 \end{pmatrix}$$
   linear unabhängig sind[2].

3. **Polynomdivision mit Mathematica:** Verwenden Sie Mathematica, um die Ergebnisse folgender Polynomdivisionen mit Rest zu bestimmen[3].

   (a) $\left(\sum_{n=0}^{124} X^n\right) : \left(\sum_{n=0}^{24} X^n\right)$

   (b) $\left(\sum_{n=0}^{20} X^n\right) : (1 - X^2 + X^4 - X^6 + X^8)$

   (c) $\left(\prod_{n=0}^{4} \left((X^2 - (2n)^2)(X^2 - (2n+1)^2)\right)\right) : \left(\prod_{k=-9}^{9} (X - k)\right)$

   Ihre Lösung schicken Sie per Anhang als e-mail an "linal1@mathematik.uni-kassel.de".

   Vergessen Sie nicht, im Notebook ihren Namen, ihre Gruppe und e-mail-Adresse zu vermerken. Die Lösung dieser Aufgabe bekommen Sie per e-mail kommentiert zurück.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 17.12.2003, 11.00 Uhr: Die Aufgaben 1 und 2 in den Fächern im 2. Stock, Aufgabe 3 per e-mail an linal1@mathematik.uni-kassel.de .

---

[1] Dieser Ring ist ein klassisches Beispiel für einen Ring, in dem keine eindeutige Faktorzerlegung möglich ist. In $\mathbb{Z}$ ist etwa $6 = 2 \cdot 3$ im wesentlichen die einzige Zerlegung von 6 in nicht invertierbare und nicht weiter zerlegbare Teiler. Aber in R ist $6 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}) = 2 \cdot 3$ wobei keiner der vier auftauchenden Faktoren invertierbar, weiter zerlegbar oder durch einen der drei anderen Faktoren teilbar ist.

[2] Nutzen Sie bei den Berechnungen die dritte binomische Formel $X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$ und vermeiden Sie das Ausmultiplizieren, sondern versuchen Sie Ausdrücke als Produkt möglichst einfacher Faktoren darzustellen.

[3] Hierzu schauen Sie wenn nötig im "Help Browser" unter den Stichwörtern "PolynomialQuotient", "PolynomialRemainder", "Sum" und "Product" die Erklärungen und Beispiele an.
Um zwischen den Formelzeilen Kommentare einzufügen, können Sie durch Anklicken von "Menu Commands→Format Menu→Style" eine markierte Zelle in Text verschiedener Stilrichtungen umwandeln. Im im Hilfeprogramm, Abteilung "Other Information", (Menüpunkt "Menu Commands") finden Sie weitere Informationen. (Tipp: experimentieren Sie ein wenig in einem gesonderten Notebook).