Prof. Dr. Wolfram Koepf
D. Müller

17.12.2003

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 7

1. **Eine Basis von $\mathbb{R}[X]$:** Wir betrachten $\mathbb{R}[X]$, den $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome in der Unbestimmten X. Weiter seien die Polynome der Gestalt $f_n(X) = (X-1)\cdot\ldots\cdot(X-n)$,
$$L := \left\{ f_n(X) = \prod_{k=1}^{n}(X-k) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \cup \{1\}$$
gegeben. Sei $f_0(X) := 1$ das Einspolynom.
   (a) Zeigen Sie[1] , daß für $N \in \mathbb{N}_0$ die Polynome $f_0(X), \ldots f_N(X)$ linear unabhängig sind.
   (b) Zeigen Sie[2] mit vollständiger Induktion nach $N \in \mathbb{N}$:
   Die Polynome $1, f_0(X), \ldots, f_N(X)$ erzeugen den Untervektorraum $\mathcal{P}_{N+1} \subset \mathbb{R}[X]$ aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich $N+1$.

   Damit haben Sie die Hauptarbeit geleistet, um zu zeigen, daß L eine Basis von $\mathbb{R}[X]$ ist[3].

2. **Dimension und lineare Abbildungen in $\mathbb{R}[X]$:**
   (a) Welche Dimension hat der $\mathbb{R}$–Vektorraum
$$\operatorname{span}\big(X^3 - X,\ X^2 + X,\ -X^2 + 1,\ -X^3 + X^2 + X - 1\big) \subset \mathbb{R}[X]?$$
   (b) Zeigen Sie: Die Ableitungsfunktion
$$D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad f(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \mapsto f'(X) = \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k X^{k-1}$$
   ist $\mathbb{R}$–linear.

3. **Direkte Summe von Unterräumen:** Sei V ein Vektorraum, U_1, U_2 seien Untervektorräume[4] von V.

   Dann definiert man die Summe als $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$.

   Die Summe $U_1 + U_2$ heißt direkt, wenn aus $u_1 + u_2 = 0$ folgt, daß $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ gelten. Man schreibt dann auch $U_1 \oplus U_1$.

   Zeigen Sie: Ist die Summe $U_1 + U_2$ direkt, so ist für jedes $u \in U_1 + U_2$ die Darstellung $u = u_1 + u_2, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ eindeutig[5] .

Abgabe: Bis Mittwoch, den 07.01.2004, 11.00 Uhr in den Fächern im 2. Stock.

---

[1]Tipp: Eine Linearkombinationen von Polynomen ist wieder ein Polynom, in das man Zahlenwerte einsetzen kann. Zeigen und verwenden Sie $f_n(l) = 0, l = 1 \ldots n$.

[2]Tipp: Es ist $f_{N+1}(X) = X^{N+1} + \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k X^k$ für $\alpha_k \in \mathbb{R}, k = 0 \ldots n$. Wir wissen $\sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k X^k \in \mathcal{P}_N$ ohne die α_k wirklich auszurechnen.

[3]L erzeugt $\mathbb{R}[X]$: Jedes $p(X) \in R[X]$ hat endlichen Grad, liegt also in einem $\mathcal{P}_N$. Daher ist $p(X)$ nach (1b) Linearkombination endlich vieler Elemente aus L, nämlich $1, f_1(X), \ldots f_N(X)$.
L ist linear unabhängig: Ist $L' \subset L$ endlich und nicht leer, so gibt es ein maximales N mit $f_N(X) \in L'$ und damit $L' \subset \{1, f_1, \ldots f_N\}$. Nach (1a) ist $\{1, f_1(X), \ldots f_N(X)\}$ linear unabhängig also auch die Teilmenge L'.

[4]Im Rahmen dieser Aufgabe brauchen wir nur die Addition - alles bleibt also richtig, wenn wir statt Vektorräumen hier Beliebige Gruppen nehmen!

[5]Daher kann man u mit dem Tupel $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ identifizieren.

Zusatzaufgaben, “zwischen den Jahren” zu lösen:

Z1 : Die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bildet in natürlicher Weise[6] einen $\mathbb{R}$–Vektorraum. Man zeige durch Auswertung an verschiedenen Stellen, daß die Funktionen f_1, f_2, f_3 mit

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(nx), \qquad n = 1, 2, 3$$

linear unabhängig sind. Aus der Schule bekannte Eigenschaften der Sinus-Funktion dürfen benutzt werden.

Z2: Im Ring $\mathbb{C}[a, h, j, n, p, r, s, t, u]$ in 9 Unbestimmten löse man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & p & r & 1 \\ o & s & it & -n \\ e & u & j & a \\ 1 & h & r & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

wobei $e = -2a, o = 2n$.

(Tipp: Raten Sie die Lösung angedenk des Aufgabenanlasses (leicht). Benutzen Sie Mathematica (mittel). Hartgesottene verwenden elementare Zeilenumformungen und nutzen die Nullteilerfreiheit des Polynomringes (knifflig).)

Ein frohes Fest und einen guten Rutsch!

[6] Die Summe zweier Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist, wie in früheren Aufgaben, durch die Funktion $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ gegeben.
Das Produkt $\lambda f, \lambda \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird durch die Funktion $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$ definiert. Nullelement ist die Nullfunktion und das Inverse $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $x \mapsto -f(x)$ gegeben.