Prof. Dr. Wolfram Koepf
D. Müller

07.01.2004

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 8

1. **Eine spezielle Abbildung:** Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 \end{pmatrix},$$

   (a) Finden Sie die reelle 3×4–Matrix A mit $f(v) = A \cdot v$ für $v \in \mathbb{R}^4$.

   (b) Finden Sie eine Basis von Kern f und eine Basis von Bild f.

   (c) Geben Sie den Rang von f an.

2. **Matrixrang:** Bestimmen Sie den Rang folgender Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 & 7 \\ -3 & 7 & -7 & -9 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & -9 \\ 5 & -11 & 9 & 11 & -3 \\ -7 & 5 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

3. **Aufteilen einer Abbildung:** Gegeben seien endlichdimensionale Vektorräume U, V, W und lineare Abbildungen $f : U \to V, h : U \to W$. Zeigen Sie:
   Es gibt genau dann eine lineare Abbildung $g : V \to W$ mit $h = g \circ f$, wenn Kern $f \subset$ Kern h ist.

   "$\Rightarrow$" ist nicht schwer zu zeigen.

   Für "$\Leftarrow$": Um g zu konstruieren, gehe man wie folgt vor:

   i: Man zeige, daß es eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V gibt, so daß $\{v_1, \ldots, v_r\}$ eine Basis von Bild f ist[1].

   ii: Man zeige, daß eine Basis $\{u_1, \ldots, u_m\}$ von U entsteht, wenn man Urbilder u_i mit $f(u_i) = v_i, i = 1 \ldots r$ wählt und $\{u_{r+1}, \ldots u_m\}$ eine Basis von Kern f ist[2].

   iii: Nun definiere man g durch Angabe der (passend zu wählenden) Bilder der Basiselemente, und zeige, daß die geforderten Bedingungen erfüllt sind.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 14.01.2004, 11.00 Uhr in den Fächern im 2. Stock.

[1] Siehe Basisergänzungssatz.

[2] Die Technik taucht im Beweis des Dimensionssatzes aus der Vorlesung auf.