Prof. Dr. Wolfram Koepf
D. Müller 14.01.2004

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 9

1. **Matrizen invertieren:**

   (a) Invertieren Sie die Matrix
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Sei A die Drehmatrix $T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ mit $\cos(\varphi) \neq 0$.

   Invertieren Sie diese Matrix mit dem Gaußalgorithmus[1]. Welche Drehung beschreibt ihr Ergebnis[2]?

2. **Matrixprodukte:**

   (a) Bestimmen Sie folgende Matrixprodukte:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Wir haben die $m \times n$–Matrix A und eine $n \times r$–Matrix B. Zeigen Sie: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $A(\lambda B) = \lambda(AB)$

   (c) Sei A invertierbar, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

3. **Roboterarm:** Ein Roboterarm sei im Nullpunkt des $\mathbb{R}^3$ montiert. Die Position des Endgerätes (der "Hand") sei durch x, y, z–Koordinaten gegeben.

   (a) Der Arm kann im Montagepunkt auf der x, y–Ebene um einen beliebigen Winkel φ gedreht werden, wobei Positionen auf der z–Achse unverändert bleiben.

   Beschreiben Sie die Matrix A_φ, die die alte Position $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in die Position $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ nach der Drehung um φ um die z–Achse überführt.

   (b) Nun sei dem Roboter noch eine weitere Bewegungsfreiheit gegeben: Eine Drehung (Neigung) um einen Winkel ψ um die y–Achse. Finden Sie auch hier die zugehörige Matrix B_ψ.

   (c) Geben Sie die Matrix $C_{\varphi,\psi}$ an, die die Transformation beschreibt, wenn erst die Drehung um φ um die z–Achse und anschließend die Drehung um ψ um die y–Achse ausgeführt wird.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 21.01.2004, 11.00 Uhr in den Fächern im 2. Stock.

[1] Nutzen Sie die Beziehung $\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 = 1$.
[2] Es gelten $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi) = \cos(-\varphi)$.