Prof. Dr. Wolfram Koepf
D. Müller

21.01.2004

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 10

1. **Elementare Zeilenoperationen als Matrixmultiplikation:** In der Vorlesung wurde erwähnt, daß elementare Zeilenumformungen Matrixmultiplikationen entsprechen.

   Geben Sie für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die 4×4–Matrizen F, G an mit:

$$F \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + \lambda a_{21} & a_{32} + \lambda a_{22} & a_{33} + \lambda a_{23} & a_{34} + \lambda a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$G \cdot A = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

2. **Rechnen mit Matrizen:** Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ und E die $n \times n$–Einheitsmatrix.

   (a) Wir definieren $A^0 := E$. Vereinfachen Sie für $k \in \mathbb{N}$ den Ausdruck

$$(E - A) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} A^j \right)$$

   zu einer Summe verschiedener Potenzen von A.

   (b) Angenommen es gilt $A^n = 0$. Folgern Sie, daß $E - A$ invertierbar ist.

   (c) Wieder sei $A^n = 0$. Die Matrix B sei invertierbar und B^{-1} bekannt.
   Dann ist $B - AB$ invertierbar.
   Geben Sie $(B-AB)^{-1}$ als Summe von Produkten der bekannten Matrizen A, B, B^{-1}, E an. Verifizieren Sie ihr Ergebnis durch Multiplizieren mit $B - AB$.

3. **Basisdarstellung eines speziellen Endomorphismus:** Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi^n = 0$. Weiter existiere ein Vektor $v_1 \in \mathbb{R}^n$ mit $\varphi^{n-1}(v_1) \neq 0$.

   (a) Zeigen Sie: die Vektoren

$$v_1, v_2 := \varphi(v_1), v_3 := \varphi^2(v_1), \ldots v_n := \varphi^{n-1}(v_1)$$

   sind eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

   (b) Geben Sie die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Basis $v_1, \ldots, v_n$ an.

   (c) Zeigen Sie: für $n = 3$, $\varphi : w \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot w$, $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind die Bedingungen aus dieser Aufgabe erfüllt. Geben Sie die Basiswechselmatrix von $\mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis in den $\mathbb{R}^3$ mit der Basis v_1, v_2, v_3 an.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 28.01.2004, 11.00 Uhr in den Fächern im 2. Stock.