Prof. Dr. Wolfram Koepf
D. Müller

28.01.2004

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 11

1. **Determinanten**

   (a) Demonstrieren Sie das Berechnen der Determinante mit dem Gauß–Verfahren an folgendem Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Determinante der folgenden $n \times n$– Matrix ($n \geqq 2$):

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

   Hinweis: Zeigen Sie mit Induktion nach k, wie die ersten $k+1$ Einträge der $k+1$-ten Zeile nach dem k-ten Schritt des Gaußverfahrens aussieht (natürlich nur für $k < n$). Beachten Sie: $2 - \frac{k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$.

2. **Determinanten mit Unbestimmten**

   (a) Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = (x-1)^2(x+2)$$

   (b) Berechnen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix}$$

3. **Anwendung: Eigenwerte**

   Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$.

   (a) Für welche Werte $\lambda_{1,2,3} \in \mathbb{Q}$ ist $\det(A - \lambda E) = 0$?
   Diese Werte heißen "Eigenwerte" der Matrix A.

   (b) Finden Sie für jeden der drei gefundenen Eigenwerte λ_k einen Vektor $v_k \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{0\}$ mit $v_k \in \mathrm{Kern}(A - \lambda_k E), k = 1, 2, 3$.
   Solche Vektoren heißen "Eigenvektoren" zum jeweiligen Eigenwert.

   (c) Zeigen Sie: $v \neq 0$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ genau dann, wenn $Av = \lambda v$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 04.02.2004, 11.00 Uhr in den Fächern im 2. Stock.