Prof. Dr. Wolfram Koepf
D. Müller

04.02.2004

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 12

1. **Dimension und Verkettung von Abbildungen**

   (a) Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und $\varphi, \psi : V \to V$ seien lineare Abbildungen.
   Zeigen Sie: Ist φ nicht bijektiv, so ist auch $\psi \circ \varphi$ auch nicht bijektiv.

   (b) Sei nun $V = \mathbb{Q}[X]$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{Q}$.
   Sei $\varphi : V \to V, f(X) \mapsto X \cdot f(X)$.
   Zeigen Sie, daß φ nicht surjektiv ist und finden Sie eine lineare Abbildung $\psi : V \to V$ so daß $\psi \circ \varphi$ bijektiv ist.

2. Auf Blatt 6 hatten wir gezeigt daß $K = \left\{ a + bi\sqrt{5} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ mit der komplexen Addition und Multiplikation ein Körper ist. Offenbar ist $\mathbb{Q} \subset K$ ein Unterkörper von K. Damit wird K ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum der Dimension 2.

   (a) Zeigen Sie: $\left\{1, i\sqrt{5}\right\}$ ist eine Basis von K.

   (b) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi : K \to K, z \mapsto (1 - i\sqrt{5}) \cdot z$, also die Multiplikation mit $1 - i\sqrt{5}$, ist eine $\mathbb{Q}$–lineare Abbildung.

   (c) Finden Sie bezüglich der Basis $\left\{1, i\sqrt{5}\right\}$ die darstellende Matrix von φ.

3. **Cramersche Regel** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ a & b & 1 & b & a \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5 \times 5, \mathbb{Q})$.

   (a) Bestimmen Sie $\det A$ durch Entwickeln nach einer geeigneten[1] Spalte.

   (b) Für welche Paare von Parametern $a, b \in \mathbb{Q}$ kann hier die Cramersche Regel angewandt werden? Bestimmen Sie für diese Parameter mit der Cramerschen Regel x_3 in der Gleichung
   $$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Bestimmen Sie mit der Methode der Inversenbestimmung durch Determinanten (Satz 3.3.4 aus der Vorlesung) den Eintrag c_{54} der Matrix $C = (c_{ij}) = A^{-1}$, ohne A^{-1} vollständig zu berechnen.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 11.02.2004, 11.00 Uhr in den Fächern im 2. Stock.

[1] Wählen Sie die Spalte so, daß möglichst viele der Unbestimmten in den Streichungsmatrizen wegfallen. Gleiches gilt für die nachfolgenden Entwicklungsschritte.