

Extrempunkte und Stützpunkte
in Familien
nicht-verschwindender
analytischer Funktionen

Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

von
Wolfram Koepf
aus Stuttgart

1984

Betreuer: Prof. Dr. H. Begehr
Prof. Dr. J. Becker (TU Berlin)
Prof. Dr. F. Huckemann (TU Berlin)

Gutachter:

Für die Betreuung bedanke ich mich bei
Prof. Dr. Becker, Prof. Dr. Begehr sowie
Prof. Dr. Huckemann.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I Einführung	1
- Extrempunkte	1
- Stützpunkte	2
- Definition der betrachteten Funktionenfamilien	3
II Maximale Extrem- und Stützpunkte	7
- Subordination	7
- Subordinationshalbordnung und subordinationsinvariante Familien	8
- Die extremale Subordinationseigenschaft	9
III Extremalprobleme in Familien mit einfacher Maximalstruktur	14
- BCK-Funktionen und einfache Familien	14
- Extrem- und Stützpunkte in einfachen Familien	15
- Konstruktion von BCK-Funktionen	19
IV Betrachtung spezieller einfacher Familien	24
- Die Familien P_o^α	24
- Folgerungen aus der Subordination	28
- Exponierte Punkte	36
- Das Koeffizientenproblem	38
V Familien von Funktionen, deren Bildgebiete geometrische Eigenschaften besitzen	40
- Konvexe Funktionen	40
- Sternförmige Funktionen	42
- Nahezu-konvexe Funktionen	45
- Funktionen mit beschränkter Randdrehung	47
- Konvexe Funktionen in Richtung der imaginären Achse	48
- Funktionen mit symmetrischen Bildgebieten	50
VI Familien von Funktionen mit reellen Koeffizienten	53
Anhang	60
- Die Sätze von Kreĭn-Mil'man und Choquet	60
- Folgerungen und weitere Aussagen	60
- Notationen	64
Literaturverzeichnis	67

I. Einführung

Extrempunkte

Sei A die Familie der analytischen Funktionen der Einheitskreisscheibe \mathbb{D} . Versehen mit der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz ist A ein metrisierbarer lokal-konvexer Vektorraum.

Topologische Begriffe wie Grenzwert, Stetigkeit oder Kompaktheit beziehen sich immer auf diese Topologie.

Eine abgeschlossene Teilmenge F von A ist genau dann kompakt, wenn sie lokal gleichmäßig beschränkt ist. Die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\text{co}} F$ einer kompakten Menge F ist somit ebenfalls kompakt.

Als *Extrempunkt* einer Teilmenge F eines Vektorraums wird ein Punkt bezeichnet, der sich nicht konvex mittels anderer Punkte aus F darstellen läßt. Mit EF bezeichnen wir die Menge der Extrempunkte von F . In lokal-konvexen Räumen besagt der Satz von Kreĭn-Mil'man, daß die Extrempunkte einer kompakten Menge die abgeschlossene konvexe Hülle aufspannen, also $\overline{\text{co}} EF = \overline{\text{co}} F$.

Ist auch $\overline{\text{co}} F$ kompakt - also innerhalb A immer bereits, wenn F kompakt ist - liegen die Extrempunkte von $\overline{\text{co}} F$ alle in F .

Eine Vertiefung des Satzes von Kreĭn-Mil'man stellt der Satz von Choquet dar, der für metrisierbare Räume gilt (siehe dazu auch im funktionalanalytischen Anhang). Die Darstellbarkeit der Punkte einer kompakten konvexen Menge mit Hilfe der Extrempunkte läuft im metrisierbaren Fall auf eine Integraldarstellung mit Wahrscheinlichkeitsmaßen hinaus, deren Träger die Menge der Extrempunkte ist.

Als Beispiel für die vorliegende Situation dient die Familie

$$(1) \quad P := \{f \in A \mid f(0) = 1, \operatorname{Re} f > 0\}$$

der Funktionen mit positivem Realteil.

Die Formel von Herglotz, die er 1911 [22] ermittelte, besagt,

daß jede Funktion p aus P eine Darstellung der Form

$$(2) \quad p(z) = \int_X \frac{1+xz}{1-xz} d\mu(x) , \quad X := \{x \mid |x| = 1\}$$

hat, wobei μ ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß über X ist.

Es zeigt sich, daß die Extrempunkte von P

$$(3) \quad EP = \{f \mid f(z) = \frac{1+xz}{1-xz} , |x| = 1\}$$

die Kernfunktionen sind, und wegen der Parametrisierung von EP über X liegt eine Integraldarstellung über X vor. Wegen des Satzes von Choquet sind (2) und (3) äquivalent. Für die Details der Anwendung der Sätze von Krein-Mil'man und Choquet sei auf die Darstellungen in Brickman, MacGregor und Wilken [9], Clunie [12], Phelps [34] und Schober [40] verwiesen.

Stützpunkte

Extrempunkte sind deshalb von besonderer Bedeutung, weil unter den Lösungen eines linearen Extremalproblems stets ein Extrempunkt ist.

Sei A' der Dualraum von A , d.h. der Raum der stetigen linearen Funktionale in A .

Ist $L \in A'$, so heißt $f \in F$ *Stützpunkt bezüglich L* von F , wenn $(\operatorname{Re} Lf \geq \operatorname{Re} Lg$ für alle $g \in F$) und L nicht konstant in F ist.

Ist f der einzige Stützpunkt bzgl. L , so nennen wir ihn *exponiert*.

Die Menge der Stützpunkte bzgl. L von F bezeichnen wir mit $\operatorname{Spt}_L F$, die Menge aller Stützpunkte in F mit $\operatorname{Spt} F$ und die Menge der exponierten Punkte mit $\operatorname{Exp} F$.

Ein Extrempunkt ist nicht notwendigerweise ein Stützpunkt, und umgekehrt weiß man im allgemeinen nicht, ob alle Stützpunkte extrem sind. Lediglich zwei Feststellungen gelten für eine kompakte Familie F . Erstens gibt es zu jedem nicht konstanten Funktional $L \in A'$ einen Stützpunkt, der in $\overline{\operatorname{Co}} F$ liegt, und zweitens liegt

jeder exponierte Punkt auch in $\overline{\text{Eco}} F$.

Im Anhang sind weitere Aussagen zusammengetragen, die innerhalb dieser Arbeit wesentlich benutzt werden.

Definition der betrachteten Funktionenfamilien

Wir betrachten hier vor allem Familien nicht-verschwindender Funktionen, das sind Teilmengen von

$$(4) \quad N_0 := \{f \in A \mid f(0) = 1, f(z) \neq 0\}.$$

Die Familie S_0 der schlichten N_0 -Funktionen wurde von Duren und Schober [14]-[15], Hamilton [20] u.a. untersucht. Davor waren hauptsächlich Familien der Normierungsklasse

$$(5) \quad N := \{f \in A \mid f(0) = 0, f'(0) = 1\}$$

untersucht worden. Insbesondere für Familien, die über besondere geometrische Eigenschaften des Bildgebiets definiert werden, sind in den siebziger Jahren viele Ergebnisse zustande gekommen. Wir betrachten folgende Funktionenfamilien:

$$(6) \quad S^* := \{f \in A \mid f \text{ schlicht}\},$$

$$(7) \quad K^* := \{f \in S^* \mid f \mathbb{D} \text{ konvex}\},$$

$$(8) \quad \text{St}^{a^*} := \{f \in S^* \mid f \mathbb{D} \text{ sternförmig bezüglich } a\},$$

$$(9) \quad \text{St}^* := \bigcup_{a \in \mathbb{C}} \text{St}^{a^*},$$

$$(10) \quad C^* := \{f \in S^* \mid \exists \varphi \in K^* (\text{Re } \frac{f'}{\varphi'} > 0)\}$$

(siehe dazu die analytische Definition von Kaplan [24] und die geometrische Beschreibung von Biernacki [3] und Lewandowski [27]-[28]).

In Verallgemeinerung dazu betrachten wir auch die (für $\beta > 1$ nicht nur aus schlichten Funktionen bestehenden) Familien

$$(11) \quad C^*(\beta) := \{f \in A \mid \exists \varphi \in K^* (\arg \frac{f'}{\varphi'} \leq \beta \frac{\pi}{2})\}$$

für ein $\beta \in [0, \infty[$ (siehe dazu die geometrische Beschreibung für $\beta \in [0, 1]$ von Pommerenke [36] und Reade [37]) .

Bekannte Teilmengen von $C^*(\beta)$ sind die Familien von Funktionen beschränkter Randdrehung

$$(12) \quad V^*(k) := \{f \in A \mid \text{Randdrehung von } f \mathbb{D} \leq k\pi\}$$

für ein $k \in [2, \infty[$ (siehe dazu die Arbeit von Paatero [31]), für die gilt

$$(13) \quad V^*(k) \subset C^*(k/2-1)$$

(siehe z.B. Schober [40], S. 24).

Eine nicht uninteressante (durch die asymmetrische Definition etwas aus dem Rahmen fallende) Familie ist

$$(14) \quad KI^* := \{f \in S^* \mid f \mathbb{D} \text{ konvex in Richtung der imaginären Achse}\}$$

(siehe Robertson [38]).

Die Notation $F := F^* \cap N$ für ein F^* der obigen Liste liefert uns die wohlbekanntenen normierten Funktionenfamilien.

Die Familie S ist schon vielfältig auf Extremalprobleme hin untersucht worden; vor allem diesen Ergebnissen sind die Monographien von Duren [13], Pommerenke [35] und Schober [40] gewidmet.

Alle oben definierten normierten Familien sind kompakt, und somit hat jedes stetige Extremalproblem eine Lösung. Die Extrempunkte der abgeschlossenen konvexen Hüllen enthalten Lösungen für jedes Extremalproblem bzgl. eines stetigen linearen Funktionals.

Folgende Ergebnisse wurden in den Arbeiten von Brickman, MacGregor und Wilken (BMW) [9], Brannan, Clunie und Kirwan (BCK) [4], Grassmann, Hengartner und Schober (GHS) [17], Hengartner, Plugger und Schober (HPS) [21], Hornblower und Wilken [23] erarbeitet.

Wir vereinbaren die Bezeichnungen X und Y für die Einheitskreislinien der x - bzw. y -Ebene.

$$(15) \quad \overline{\text{Eco}} K = \text{Spt } K = \text{Exp } K = \{f \mid f(z) = \frac{z}{1-xz}, x \in X\},$$

$$(16) \quad \overline{\text{Eco}} \text{St}^{\circ} = \text{Spt } \text{St}^{\circ} = \text{Exp } \text{St}^{\circ} = \{f \mid f(z) = \frac{z}{(1-xz)^2}, x \in X\},$$

$$(17) \quad \overline{\text{Eco}} C = \text{Spt } C = \text{Exp } C =$$

$$= \{f \in N \mid f'(z) = \frac{(1+xz)}{(1-yz)^3}, x \in X, y \in Y, x \neq -y\}.$$

Ferner gilt für $\alpha \geq 2$:

$$(18) \quad \overline{\text{co}} V(2\alpha) = \overline{\text{co}} C(\alpha-1),$$

$$(19) \quad \overline{\text{Eco}} V(2\alpha) \subset \{f \in N \mid f'(z) = \frac{(1+xz)^{\alpha-1}}{(1-yz)^{\alpha+1}}, x \in X, y \in Y, x \neq -y\} =: M_{\alpha},$$

$$(20) \quad \text{Spt } V(2\alpha) \subset M_{\alpha}.$$

Wir werden hier Familien der Form $F_{\circ} := F^* \cap N_{\circ}$ betrachten, und es scheint zunächst naheliegend, daß es möglich sein müßte, von den entsprechenden Ergebnissen der bzgl. N normierten Familien zu Ergebnissen über Extrem- oder Stützpunkte zu kommen.

Aber in beiden Fällen scheitert diese Vorgehensweise an der Tatsache, daß für $f \in N_{\circ}$ der Wert $f'(0)$ variabel ist.

Wir werden hier zu Ergebnissen auf direktem Weg gelangen, und wir werden sehen, daß sie sich nahezu rein geometrisch ableiten lassen, im Gegensatz zu den analytischen Beweisführungen bei den N -Familien.

Die beiden Normierungen sind in bezug auf die Geometrie auch von grundsätzlichem Unterschied: Funktionen in N_{\circ} entsprechen Gebieten G mit der einfachen geometrischen Eigenschaft $1 \in G$ und $0 \notin G$.

Die Klasse N wurde durch eine analytische Normierung erklärt, die nicht eine unmittelbare geometrische Deutung zuläßt.

Bei der Lösung konkreter Extremalprobleme in dieser Arbeit gehen wir konstruktiv vor. Die Resultate sind daher alle scharf, und die Extremalfunktionen sind der jeweiligen Konstruktion zu entnehmen und werden in der Formulierung der Sätze nicht explizit aufgeführt.

II. Maximale Extrem- und Stützpunkte

Subordination

Wir betrachten noch einmal das Beispiel P .

Der Satz von Herglotz besagt (siehe BMW [9], Th. 1, Clunie [12], S.138)

$$(1) \quad EP = \left\{ f \mid f(z) = \frac{1+yz}{1-yz}, y \in Y \right\} =: E$$

und es liegt die Frage nahe, welche Bedeutung die beiden Inklusionen $EP \subset E$ und $E \subset EP$ besitzen.

Wir werden zeigen, daß aus geometrischen Gründen die Aussage

$$(2) \quad EP \supset E$$

zwingend und sozusagen a priori gültig ist. Die eigentliche Tiefe des Herglotzschen Satzes liegt in der Beziehung

$$(3) \quad EP \subset E,$$

d.h. der Aussage, daß weitere Extrempunkte nicht existieren.

Relation (2) wurde mit analytischen Methoden von Hallenbeck und MacGregor (HM) [18], Theorem 6, in einem allgemeineren Konzept gezeigt, da P eine Subordinationseigenschaft besitzt.

Wir gehen einen anderen Weg, gehen von der Geometrie aus und erhalten allgemeinere Resultate. Auch wir benötigen dazu wesentlich den Begriff der Subordination.

Definition

Sei $B := \{\omega \in A \mid \omega(0) = 0, |\omega| < 1\}$.

Sind $f, g \in A$, dann heißt f *subordiniert zu* g oder $f < g$: $\Leftrightarrow \exists \omega \in B$ ($f = g \circ \omega$).

Geometrisch bedeutet der Begriff der Subordination für eine schlichte Funktion g , daß das Bildgebiet von f im Bildgebiet von g enthalten ist.

Automatisch gilt dies dann auch für die Bilder von Kreisscheiben um den Ursprung mit einem Radius kleiner als 1 als Folge des Schwarzschen Lemmas.

Weitere Eigenschaften der Subordination sind z.B. in jeder der Monographien [13], [35], [40] zu finden.

Subordinationshalbordnung und subordinationsinvariante Familien

Die Menge $(N_0, <)$ ist halbgeordnet, sofern wir in naheliegender Weise Äquivalenzklassen von zueinander gegenseitig subordinierten Funktionen betrachten, also alle Funktionen mit derselben Riemannschen Bildfläche zusammenfassen. Die Äquivalenzklassen sind die Mengen

$$[f] := \{g \mid g(z) = f(xz), x \in X\} .$$

Mit $\text{Max } F$ bezeichnen wir die in F liegenden maximalen Elemente von F bezüglich $<$.

Wir betrachten nun spezielle Familien.

Definition.

Für $F \subset A$ heißt $\text{Sub } F := \{g \mid g < f, f \in F\}$ die *subordinationsinvariante Hülle* von F . Falls $F = \text{Sub } F$ ist, nennen wir F *subordinationsinvariant*.

Es ist offenbar, daß die subordinationsinvariante Hülle einer kompakten Familie F von deren maximalen Elementen erzeugt wird, also:

Lemma 1.

$$F \subset N_0 \text{ kompakt} \Rightarrow \text{Sub } F = \text{Sub Max } F .$$

(siehe auch Brickman und Wilken (BW) [10], Theorem 1).

Ebenso läßt sich ohne großen Aufwand eine weitere Aussage beweisen.

Dazu definieren wir einen auch später häufig gebrauchten Begriff.

Definition.

Die Familie $F \subset A$ heißt *drehungsinvariant*, wenn sie mit jedem Element f dessen Äquivalenzklasse $[f]$ enthält (s. auch BW [10]).

Lemma 2.

$$F \subset N_0 \text{ kompakt} \Rightarrow \text{Max } F \subset \text{Max Sub } F$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\text{Max } F$ drehungsinvariant ist.

Außerdem gelten folgende Aussagen:

Lemma 3.

- (a) Eine subordinationsinvariante Familie ist drehungsinvariant.
- (b) F drehungsinvariant \Rightarrow $\text{Max } F$ drehungsinvariant.

Die extremale Subordinationseigenschaft

Wir werden nun zeigen, daß zwischen linearen Extremalproblemen und der Subordinationshalbordnung ein Zusammenhang besteht.

(Diesen Zusammenhang vermutet man z.B. bei der Betrachtung der Klasse P von Funktionen mit positivem Realteil.)

Wir definieren dazu zunächst den Begriff der extremalen Subordinationseigenschaft (ESE), die eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß in Bezug auf die Halbordnung größere Elemente Extremaleigenschaften von kleineren erben.

Definition.

$F \subset N_0$ heißt *stark* (oder *hat die ESE*) $:\Leftrightarrow$ aus $h < g$ mit $h = g \circ \omega$, $h \in F$, $g \in F$ folgt: $f \circ \omega \in F$ für alle $f \in F$.

Beispiele für starke Mengen sind beliebige subordinationsinvariante Familien, aber auch S_0 , weil hier ω schlicht ist.

$S_0(\mathbb{R}) := \{f \in S_0 \mid a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ ist stark, da hier ω reelle Koeffizienten hat.

Der Durchschnitt starker Mengen ist stark.

Der folgende Satz ist eine naheliegende Verallgemeinerung eines in letzter Zeit vielfach benutzten Sachverhalts, der in S angewendet wurde. Die im wesentlichen benötigte Eigenschaft von S (auf die Normierung N übertragen) ist die eben definierte extremale Subordinationseigenschaft.

Siehe dazu Schaeffer und Spencer [39], Lemma XXIX, sowie [33], [16], [25], [8], [7], [6].

Satz 4.

Ist F stark, h nicht konstant, $g \in F$ und $h = g \circ \omega, \omega \in B$, so gilt

$$(a) \quad \begin{aligned} h \in EF &\Rightarrow g \in EF, \\ h \in \overline{Eco} F &\Rightarrow g \in \overline{Eco} F. \end{aligned}$$

(b) Ist ferner $L \in A'$ nicht konstant in F und K das durch

$$K(f) := L(f \circ \omega)$$

definierte Funktional in A' , so folgt

$$\begin{aligned} h \in \text{Spt}_L F &\Rightarrow g \in \text{Spt}_K F \text{ oder } K \text{ ist konstant in } F, \\ h \in \text{Exp } F &\Rightarrow g \in \text{Exp } F. \end{aligned}$$

Beweis.

(a) Wäre $g \notin \overline{Eco} F$, also $g = tg_1 + (1-t)g_2$ mit $t \in]0,1[$, $g_1 \neq g_2$ und $g_k \in \overline{Fco} F$, dann hätte wegen

$$h = g \circ \omega$$

h eine Darstellung der Form

$$h = th_1 + (1-t)h_2 \text{ mit } h_k := g_k \circ \omega.$$

Im ersten Fall liegt nun wegen der ESE h_k in F , und wir bekommen eine Darstellung in F und damit einen Widerspruch.

Im zweiten Fall benötigen wir für den Widerspruch, daß h_k in $\overline{co} F$ liegt.

Wir zeigen dies, indem wir aus der ESE folgern:

$$\text{aus } h = g \circ \omega, \quad h \in F, \quad g \in F \text{ folgt:}$$

$$f \circ \omega \in \overline{\text{co}} F \quad \text{für alle } f \in \overline{\text{co}} F .$$

Für jedes $f \in \overline{\text{co}} F$ gilt $f = \lim f_n$ mit

$$f_n = \sum t_k f_k, \quad \sum t_k = 1 \quad \text{und} \quad f_k \in F .$$

Für alle f_k gilt $f_k \circ \omega \in F$, also hat auch die Funktion $f_n \circ \omega$ eine Darstellung innerhalb F , und

$$f \circ \omega = \lim f_n \circ \omega$$

liegt somit in $\overline{\text{co}} F$.

(b) Ist h Stützpunkt oder exponiert bzgl. L , so gilt

$$\text{Re } Lh \geq \text{Re } Lf \quad \text{für alle } f \in F \setminus \{h\} .$$

Da nach Voraussetzung für jedes $g^* \in F$ die Funktion $f := g^* \circ \omega$ in F liegt, gilt dann

$$\text{Re } Kg = \text{Re } Lh \geq \text{Re } Lf = \text{Re } Kg^*$$

für alle $g^* \in F \setminus \{g\}$.

Also folgen unsere Behauptungen. \square

Bemerkung 1.

Satz 4 läßt sich offenbar dazu benutzen, die Menge der Extrempunkte einer starken Menge einzuschließen. Hat man nämlich für eine Funktion eine konvexe Darstellung, so kommen kleinere Elemente nicht mehr als Extrempunkte in Betracht.

Bemerkung 2.

Die mögliche Konstanz von K läßt sich in Familien, die groß genug sind, im allgemeinen a priori ausschließen. Siehe dazu z.B. [8].

Wir zeigen nun, daß es einen Zusammenhang zwischen maximalen Elementen und Extrem- oder Stützpunkten in kompakten Teilmengen von N_0 immer gibt.

Satz 5.

Eine kompakte Menge $F \subset N_0$ hat die Eigenschaften:

- (a) $\text{Max } F \cap \overline{\text{Eco } F} \neq \emptyset$
- (b) $(F \neq \{f\}) \Rightarrow (\text{Max } F \cap \text{Spt } F \neq \emptyset)$,
- (c) $(\text{Exp Sub } F \neq \emptyset) \Rightarrow (\text{Max } F \cap \text{Exp } F \neq \emptyset)$.

Enthält speziell $\text{Max } F$ nur Elemente einer einzigen Äquivalenzklasse, so gilt sogar

- (d) $\text{Max } F \subset \overline{\text{Eco } F}$.

Beweis.

(a) Da F kompakt ist, ist auch die Menge $\text{Sub } F$ kompakt (siehe MacGregor [29], S. 365). Nach dem Satz von Kreĭn-Mil'man gibt es also eine nicht konstante Funktion $f \in \text{Sub } F$ mit $f \in \overline{\text{Eco } \text{Sub } F}$. Außerdem gibt es wegen Lemma 1 ein $g \in \text{Max } F$, sodaß $f < g$. Nun läßt sich, da $\text{Sub } F$ stark ist, Satz 4(a) anwenden, und wir erhalten zunächst

$$g \in \text{Max } F \cap \overline{\text{Eco } \text{Sub } F},$$

und mit A5 (a) folgt

$$g \in \text{Max } F \cap \overline{\text{Eco } F}.$$

(c) wird analog mit Satz 4(b) und A5(c) bewiesen.

(b) Sei $k := \min \{n \in \mathbb{N} \mid a_n(f) \neq 0 \text{ für ein } f \in F\}$. Sei ferner $H := \{f \in F \mid |a_k(f)| \geq |a_k(g)| \text{ für alle } g \in F\}$. H enthält wegen des Schwarzschen Lemmas nur maximale Elemente. Außerdem enthält H entweder einen Stützpunkt bzgl. eines Funktionals vom Typ $L(f) = wa_k(f)$, $w \in \mathbb{T}$, oder $a_k(f)$ ist konstant in F . Dann aber folgt nach Definition von H , daß $H = F = \text{Max } F$ ist, u.d unsere Aussage folgt, da F mindestens zwei Funktionen enthält und somit ein nicht-konstantes Funktional existiert.

(d) Zunächst gibt es wegen (a) ein maximales Element f , das in $\overline{\text{Eco } F}$ liegt. Mit Satz 4(a) folgt dann, daß alle maximalen Elemente in $\overline{\text{Eco } F}$ liegen. □

Beispiele für die Anwendung von Satz 5(d).

(a) In $F := \text{Sub } \{f\}$ ist $\text{Max } F = [f]$.

Dies ist nur eine Äquivalenzklasse und somit gilt

$$\text{Max } F \subset \overline{\text{Eco } F}.$$

Dies wurde, wie oben erwähnt, von HM [18] mit anderen Methoden bewiesen.

(b) Spezialfall von (a). Sei $x \in \dot{X} := X \setminus \{-1\}$, $\alpha > 0$,

$h_x(z) := \frac{1+xz}{1-z}$, sowie $P_x^\alpha := \text{Sub } \{h_x^\alpha\}$ die Menge der Funktionen, die in einen vorgegebenen Sektor abbilden.

Es ist

$$\text{Max } P_x^\alpha = E_x^\alpha := [h_x^\alpha],$$

und wir haben

$$\text{Max } P_x^\alpha \subset \overline{\text{Eco } P_x^\alpha}.$$

Diese Mengen werden in Kapitel IV untersucht.

(c) Wir betrachten $S_0(\mathbb{R}) = \{f \in S_0 \mid a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$.

Es ist wegen der Symmetrie der Bildgebiete bezüglich der reellen Achse, die bei Funktionen mit reellen Koeffizienten vorliegt,

$$\text{Max } S_0(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2, \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2 \right\}, \text{ und wir haben}$$

$$\text{Max } S_0(\mathbb{R}) \subset \overline{\text{Eco } S_0(\mathbb{R})}.$$

Aber natürlich ist es unmöglich, daß die beiden Funktionen $S_0(\mathbb{R})$ bereits konvex aufspannen.

Andererseits gibt uns Satz 4 ($S_0(\mathbb{R})$ ist stark) einen Hinweis, wo wir weitere Extrempunkte suchen müssen. Sie müssen groß bezüglich $<$ sein. Daher kommen in $S_0(\mathbb{R})$ zunächst solche Funktionen, die nur reelle Werte auslassen, in Betracht.

$S_0(\mathbb{R})$ wird in Kapitel VI untersucht.

III. Extremalprobleme in Familien mit einfacher Maximalstruktur

BCK-Funktionen und einfache Familien

Nun wenden wir uns der Fragestellung zu, in welchen Fällen nur die maximalen Elemente extrem sein können.

Dazu folgende Bezeichnungen.

Definition.

$f \in A$ heißt *BCK-Funktion* oder $f \in \text{BCK} \Leftrightarrow (\overline{\text{Eco}} \text{ Sub } \{f\} = [f])$.

Bemerkung 1.

Die Bezeichnung folgt der in der Arbeit von BW [10], S. 228, benutzten und wurde wegen eines wesentlichen Satzes von BCK [4] gewählt.

Bemerkung 2.

Eine äquivalente Beschreibung einer BCK-Funktion ist

$$(1) \quad f \in \text{BCK} \Leftrightarrow \forall g < f \exists \mu \in \text{PM}(X) \left(g(z) = \int_X f(xz) d\mu \right)$$

wegen des Choquetschen Satzes (Ch 3 im Anhang). Jede konstante Funktion liegt nach Definition in BCK.

Wir definieren nun eine wichtige Eigenschaft bestimmter Familien, die weitreichende Konsequenzen hat. Die von uns in späteren Kapiteln untersuchten Familien haben diese Eigenschaft.

Definition.

$F \subset A$ heißt *einfach* $\Leftrightarrow F$ ist drehungsinvariant, und es gilt $\text{Max } F \subset \text{BCK}$.

Extrem- und Stützpunkte in einfachen Familien

Satz 1.

Ist F kompakt und einfach, so gilt $\overline{\text{Eco}} F \subset \text{Max } F$ und $\overline{\text{Co}} F = \overline{\text{Co}} \text{Max } F$.

Beweis.

Wir schreiben $\text{Max } F = \bigcup_{t \in T} [f_t]$ mit geeigneter Indexmenge T . Dies ist wegen der Drehungsinvarianz und Lemma II 3(b) möglich.

Nach Voraussetzung ist

$$(2) \quad f_t \in \text{BCK} \quad \text{für alle } t \in T.$$

Wegen Lemma II 1 können wir F folgendermaßen zerlegen:

$$(3) \quad F = \bigcup_{t \in T} F_t \quad \text{mit } F_t := F \cap \text{Sub } \{f_t\},$$

und wir erhalten zunächst mit Hilfe von (2) und KM 1

$$\overline{\text{Co}} F_t \subset \overline{\text{Co}} [f_t] \quad \text{für alle } t \in T.$$

Da F_t mit F drehungsinvariant ist, liegen alle Funktionen aus $[f_t]$ in F_t , und somit folgt

$$(4) \quad \overline{\text{Co}} F_t = \overline{\text{Co}} [f_t]$$

und damit unter Benutzung der Drehungsinvarianz

$$(5) \quad \overline{\text{Eco}} F_t = [f_t].$$

Wegen der Darstellung von F nach (3) erhalten wir aus allgemeinen Überlegungen in lokal-konvexen Räumen (A7(b))

$$\overline{\text{Eco}} F \subset \bigcup_{t \in T} [f_t] = \text{Max } F.$$

Also ist $\overline{\text{Co}} F = \overline{\text{Co}} (\overline{\text{Eco}} F) \subset \overline{\text{Co}} \text{Max } F \subset \overline{\text{Co}} F$. □

Bemerkung.

Wegen A7 (a) gilt die erste Aussage für EF statt $\overline{Eco} F$, falls $EF_t = \overline{Eco} F_t$, was in vielen Fällen gilt, z.B. wenn F_t konvex ist.

Wir sind an einer entsprechenden Aussage für die Stützpunkte interessiert. Da wir F gemäß (3) zerlegen können, genügt nach A7 (c) wiederum zunächst eine Betrachtung der Familien F_t .

Mit einer Technik, die BMW [9] bei speziellen Familien zum ersten Mal benutzten, können für die Familien F_t die Stützpunkte charakterisiert werden.

Zunächst ein Hilfssatz.

Lemma 2.

Sei f analytisch in \bar{D} . Liegt $f(y)$ für unendlich viele $y \in Y$ auf einer Geraden, so ist f konstant.

Für den einfachen Beweis sei auf BMW [9], Theorem 16, verwiesen.

Mit $co F$ bezeichnen wir die konvexe Hülle von F .

Satz 3.

Sei f eine in $\bar{D} \times D$ analytische Funktion und sei

$$\overline{Eco} F \subset \{f_y \mid f_y(z) = f(y, z), y \in Y\}.$$

Sei weiter $L \in A'$ nicht konstant in F für kompaktes $F \subset A$.

Dann gibt es nur endlich viele Punkte in $\overline{Eco} F$, die Stützpunkte bzgl. L sind, und jeder Stützpunkt ist eine endliche konvexe Kombination von Extrempunkten der abgeschlossenen konvexen Hülle:

$$Spt F \subset co (\overline{Eco} F).$$

Beweis (nach BMW [9], Theorem 8, und GHS [17]).

Sei $L \in A'$ nicht konstant in F .

Für einen Stützpunkt $g \in F$ bezüglich L gilt

$$(6) \quad M := \operatorname{Re} Lg = \max_{h \in F} \operatorname{Re} Lh.$$

Wegen der Vorgabe über die Extrempunkte und wegen der Kompaktheit von F hat g die Choquet-Darstellung

$$(7) \quad g(z) = \int_Y f_Y(z) \, d\mu$$

mit Träger in $\{y \in Y \mid f_y \in \overline{\text{Eco}} F\}$.

Hieraus folgt, daß μ -fast überall auf Y gilt

$$(8) \quad \text{Re } L f_y = M.$$

Sei H die Teilmenge von Y , in der (8) gilt.

Die Funktion ℓ , die durch

$$\ell(y) := L f_y$$

definiert wird, ist wegen der Darstellbarkeit von L mittels eines Maßes mit kompaktem Träger in \mathbb{D} (siehe Schober [40], S. 36) analytisch in $\overline{\mathbb{D}}$ als Funktion von y .

Nehmen wir nun an, H habe unendlich viele Elemente. Dann folgt wegen (8) zusammen mit Lemma 2 die Konstanz von ℓ im Widerspruch zur Nicht-Konstanz von L in F .

Also ist H endlich, und (7) wird zu

$$g = \sum_{k=1}^n \mu_k f_{Y_k}, \quad \sum_{k=1}^n \mu_k = 1, \quad \mu_k \in [0,1], \quad f_{Y_k} \in \overline{\text{Eco}} F,$$

was zu zeigen war. □

Bemerkung.

Der Satz läßt sich noch dahingehend verallgemeinern, daß Analytizität nicht in ganz $\overline{\mathbb{D}}$, sondern nur auf Y vorliegt (siehe z.B. [19], Theorem 9).

Wir erhalten den Satz über die Stützpunkte in einfachen Familien.

Satz 4.

Ist $F \subset N_0$ kompakt und einfach, ist $\text{Max } F = \bigcup_{t \in T} [f_t]$

und gibt es in jeder der Mengen $F_t = F \cap \text{Sub} \{f_t\}$ eine Funktion mit lauter nicht-verschwindenden Koeffizienten, so gilt:

$$(9) \quad \text{Spt } F \subset \bigcup_{t \in T} \text{co} [f_t] ,$$

also insbesondere

$$\text{Spt } F \subset \text{co}(\text{Max } F) .$$

Ist ferner für alle $t \in T$

$$(\text{co} [f_t] \setminus [f_t]) \cap F_t = \emptyset ,$$

so folgt:

$$\text{Spt } F \subset \text{Max } F .$$

Beweis.

Zunächst zeigen wir, daß in jeder der Familien F_t nur die Funktionale der Gestalt $L(f) = b_0 a_0(f) = b_0$ konstant sind und somit A7(c) angewendet werden kann.

Sei L ein durch seine Toeplitz-Darstellung (siehe Schober [40], S. 36)

$$L(g) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k a_k(g) , \quad \overline{\lim} |b_k|^{1/k} < 1$$

gegebenes, in F_t konstantes Funktional.

Habe $f \in F_t$ nur nicht-verschwindende Koeffizienten. Wegen der Drehungsinvarianz ist mit f auch f_x in F_t , wobei $x \in X$ und $f_x(z) = f(xz)$ ist.

Es ergibt sich nach Voraussetzung

$$L f_x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k a_k(f) x^k = \text{const.} ,$$

und für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $b_k \cdot a_k(f) = 0$. Da für alle $k \in \mathbb{N}$ $a_k(f) \neq 0$ ist, haben wir $L(f) = b_0 a_0(f)$.

Nach Voraussetzung gilt (2), also auch (5), d.h. für alle $t \in T$ gilt

$$\overline{\text{co}} F_t = [f_t] = \{g \mid g(z) = f_t(yz), y \in Y\} .$$

Nun läßt sich Satz 3 anwenden, und wir erhalten für alle $t \in T$

$$(10) \quad \text{Spt } F_t \subset \text{co } [f_t] .$$

Zusammen mit A7(c) erhalten wir also bereits das Ergebnis (9), da alle Funktionale, die in F nicht konstant sind, auch in F_t nicht konstant sind.

Weiter folgt:

$$\text{Spt } F \subset \text{co } (\text{Max } F) .$$

Liegen nun echte konvexe Kombinationen aus $[f_t]$ gar nicht in F_t , so folgt für alle $t \in T$

$$\text{Spt } F_t \subset [f_t]$$

und mit derselben Argumentation wie oben schließlich

$$\text{Spt } F \subset \text{Max } F .$$

□

Konstruktion von BCK-Funktionen

Der Satz von Herglotz zeigt, daß die durch

$$h_1(z) := \frac{1+z}{1-z}$$

erklärte Funktion h_1 in BCK liegt.

Leicht zu verifizieren ist

Lemma 5.

$(f \in \text{BCK}, a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}) \Rightarrow (af+b \in \text{BCK}) .$

Somit sind alle Halbebenenabbildungen h_x mit der Darstellung

$$(13) \quad h_x(z) = \frac{1+x}{2} \cdot \frac{1+z}{1-z} + \frac{1-x}{2} = \frac{1+xz}{1-z}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$

BCK-Funktionen.

Allerdings sind nur diejenigen Halbebenen für uns interessant, die den Ursprung nicht enthalten, d.h. nur diejenigen h_x mit $x \in \bar{\mathbb{D}} \setminus \{-1\}$.

Für Familien $F \subset N_0$ nicht-verschwindender Funktionen definieren wir

$$F^\alpha := \{f^\alpha \mid f \in F\} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Ausgehend von (13) erhält man für $P_x^\alpha = \text{Sub} \{h_x^\alpha\}$

Satz 6 (BCK [4], siehe auch Schober [40], S. 16).

Für $\alpha > 1$ und $x \in \bar{\mathbb{D}} \setminus \{-1\}$ gilt:

$$(a) \quad EP_x^\alpha = \overline{E \circ O} P_x^\alpha = E_x^\alpha, \quad \text{also insbesondere}$$

$$(b) \quad h_x^\alpha \in \text{BCK}.$$

Der Vollständigkeit halber, und da wir weitere Schlüsse aus dem Beweis ziehen wollen, nehmen wir ihn auf.

Beweis.

Ist f nicht extrem in P_x , so gibt es eine konvexe Darstellung

$$f = t f_1 + (1-t)f_2 \quad \text{mit } f_k \in P_x.$$

Diese wird zu einer konvexen Darstellung von f^α in P_x^α durch Multiplikation mit $f^{\alpha-1}$, falls

$$f_k \cdot f^{\alpha-1} \in P_x^\alpha \quad \text{für beliebige } f_k, f \in P_x.$$

Dies folgt für $\alpha > 1$ aber aus der Konvexität von $\log h_x$.

Wegen $h_x \in \text{BCK}$ gilt:

$$EP_x = \overline{\text{ECO}} P_x = E_x^1,$$

also folgt:

$$\overline{\text{ECO}} P_x^\alpha \subset EP_x^\alpha \subset \{f^\alpha \mid f \in EP_x\} = E_x^\alpha.$$

Daß wirklich alle Funktionen aus E_x^α extrem in $\overline{\text{CO}} P_x^\alpha$ sind, folgt leicht aus der Drehungsinvarianz (oder natürlich aus Satz II 5, dortiges Beispiel (b)). \square

Bemerkung.

Der Beweis gelingt offenbar nur, weil (wegen der Konvexität von h_x) $EP_x = \overline{\text{ECO}} P_x$ ist.

Dafür bekommt man aber auch die Information $EP_x^\alpha = \overline{\text{ECO}} P_x^\alpha$ mitgeliefert. Man vergleiche die Bemerkung nach Satz 1.

Durch Übertragung des Beweises erhält man eine leichte Verallgemeinerung dieses Satzes, die zur Konstruktion weiterer BCK-Funktionen nützlich ist.

Korollar 7.

Ist $f \in \text{BCK} \cap N_0$, $\log f$ konvex, $\alpha > 1$ und

$E \text{ Sub } \{f\} = \overline{\text{ECO}} \text{ Sub } \{f\}$, dann folgt:

$E \text{ Sub } \{f^\alpha\} = \overline{\text{ECO}} \text{ Sub } \{f^\alpha\} = [f^\alpha]$, also insbesondere: $f^\alpha \in \text{BCK}$.

Da die Halbebenenabbildungen die einzigen konvexen BCK-Funktionen sind (siehe HM [18], Milcetic [30], AM [1]), sind die Familien P_x beziehungsweise die Funktionen h_x ein natürlicher Ausgangspunkt zur Konstruktion von BCK-Funktionen.

Es zeigt sich ferner, daß BCK abgeschlossen ist.

Lemma 8.

Ist $\lim f_k = f$, so gilt:

$$(f_k \in \text{BCK} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}) \Rightarrow (f \in \text{BCK}).$$

Beweis.

Sei $g < f$, also $g = f \circ \omega$, $\omega \in B$. Definieren wir $g_k := f_k \circ \omega$, so gilt offenbar $g_k < f_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit haben wir die Darstellungen

$$g_k(z) = \int_X f_k(xz) d\mu_k$$

und folglich (nach Auswahl einer Teilfolge)

$$g(z) = \lim \int_X f_k(xz) d\mu_k = \int_X \lim f_k(xz) \lim d\mu_k = \int_X f(xz) d\mu,$$

weil der Grenzprozeß lokal-gleichmäßig ist und wegen der schwachen Kompaktheit von $\text{PM}(X)$ mit

$$\mu := \lim \mu_k \in \text{PM}(X) . \quad \square$$

Beispiele von BCK-Funktionen:

Wählt man die Folge

$$\left(h_{a/n-1}^n \right)_{n \geq n_0} = \left(\left(1 + \frac{az}{1-z} \cdot \frac{1}{n} \right)^n \right) \text{ mit } \text{Re } a > 0 ,$$

so erhalten wir

$$\exp \left(\frac{az}{1-z} \right) \in \text{BCK} .$$

(siehe auch Clunie [12], S. 143).

Bildet man Funktionen der Form $wh_x^2 + (1-w)$, $w \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{D} \setminus \{-1\}$, so bekommt man mit Lemma 5

$$\frac{1+az}{(1-z)^2} \in \text{BCK} \text{ für } \text{Re } a \geq -1 \text{ und}$$

$$\frac{1+xz^2}{(1-z)^2} \in \text{BCK} \quad \text{für} \quad x \in \bar{\mathbb{D}}$$

(siehe auch BW [10], Lemma 2).

Es wäre sehr interessant, insbesondere die Schlitzabbildungen auf die BCK-Eigenschaft hin zu untersuchen. Die bislang bekannten BCK-Funktionen sind sicherlich nicht die einzigen Funktionen mit dieser Eigenschaft.

IV. Betrachtung spezieller einfacher Familien

Die Familien P_O^α

Die bereits betrachteten Familien P_X^α lassen sich für $\alpha \leq 2$ geometrisch als die Mengen aller in einen vorgegebenen Sektor mit Ecke im Ursprung abbildenden N_O -Funktionen deuten.

Es liegt nun nahe, von der expliziten Vorgabe des Gebietes abzu-
sehen und alle Familien mit gleichem Winkel $\alpha\pi$ zusammenzufassen.

Wir betrachten also die Familien

$$(1) \quad P_O^\alpha := \bigcup_{x \in \dot{X}} P_x^\alpha .$$

Diese Definition ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sinnvoll, aber nur für $\alpha \geq 1$ erweist sich P_O^α als einfache Familie aufgrund von Satz III 6.

Für $\alpha \geq 1$ folgt nun:

$$(2) \quad \overline{E}CO P_O^\alpha \stackrel{KM2}{\subset} EP_O^\alpha \stackrel{A7(a)}{\subset} \bigcup_{x \in \dot{X}} EP_x^\alpha \stackrel{III6}{=} \bigcup_{x \in \dot{X}} E_x^\alpha =: E^\alpha$$

und weiter mit dem Satz von Kreĭn-Mil'man

$$(3) \quad \overline{CO} P_O^\alpha = \overline{CO} E^\alpha .$$

Aus BMW [9], Theorem 1, folgt:

$$\overline{CO} E^\alpha = \left\{ f \mid f(z) = \int_{X \times Y} h_x^\alpha(yz) d\mu, \mu \in PM(X \times Y) \right\} .$$

Welche Funktionen aus E^α wirklich extreme Punkte von $\overline{CO} E^\alpha$ sind, ob z.B. in (2) Gleichheit gilt - was man vermuten würde - ist zunächst nicht klar. Für konkrete Extremalprobleme reicht zwar sicher in den meisten Fällen die vorliegende Teilmengenbeziehung aus, aber für $\alpha = 1$ gelingt es uns auch - nach einer Methode, die in BMW [9] zur genauen Bestimmung von $\overline{ECO} C$ benutzt wird - eine positive Antwort zu finden.

Satz 1.

$$\overline{E^0} E^1 = E^1 .$$

Beweis.

In BMW [9], Theorem 6, wurde dargelegt, daß es genügt

$$(4) \quad \frac{1-x_0 z}{1-y_0 z} = \int_{X \times Y} \frac{1-xz}{1-yz} d\mu \Rightarrow \mu = \delta_{x_0 y_0}$$

zu zeigen. Dazu formen wir die linke Gleichung in (4) um und erhalten

$$(5) \quad 1-x_0 z - \int_{X \times \{y_0\}} (1-xz) d\mu = (1-y_0 z) \int_{X \times Y \setminus \{y_0\}} \frac{1-xz}{1-yz} d\mu .$$

In [9] wurde nun gezeigt, daß für $z \rightarrow \bar{y}_0$ der Ausdruck

$$(1-y_0 z)^3 \int_{X \times Y \setminus \{y_0\}} \frac{1-xz}{(1-yz)^3} d\mu$$

gegen 0 strebt. Ein analoges Beweisschema zeigt, daß dies auch für die rechte Seite von (5) gilt.

Wir erhalten also

$$(6) \quad 1-x_0 \bar{y}_0 - \int_{X \times \{y_0\}} (1-x\bar{y}_0) d\mu = 0 ,$$

woraus in [9] $\mu = \delta_{x_0 y_0}$ abgeleitet wird. □

Bemerkung.

Eine Verallgemeinerung des dargestellten Beweises für beliebiges α scheitert an der Nichtlinearität des dann in (6) auftretenden Integranden.

In Satz III 4 wurde ein Ergebnis für die Stützpunkte in einfachen Familien hergeleitet. Hallenbeck und MacGregor [19], Theorem 8, gelang es kürzlich zu zeigen, daß endliche konvexe Kombinationen von Extrempunkten von P_x^α für $\alpha > 1$ nicht in P_x^α liegen. Dies ergibt zusammen mit Satz III 4 (siehe Bem. 2, S. 28)

$$(7) \quad \text{Spt } P_0^\alpha \subset E^\alpha \quad \text{für } \alpha > 1 .$$

Anders liegt der Fall für $\alpha = 1$. Hier liegt jede konvexe Kombination aufgrund der Konvexität des maximalen Bildgebiets in P_0^1 , und es gilt somit

$$(8) \quad \text{Spt } P_0^1 \subset \bigcup_{x \in \dot{X}} \text{co } E_x^1 .$$

Für alle $\alpha \in [1,2]$, also auch für $\alpha = 1$, werden wir mit geometrischen Überlegungen zeigen, daß die vorliegenden endlichen konvexen Kombinationen jedoch nicht in S_0 liegen.

Lemma 2.

$$\text{Sei } f(z) = \sum_{k=1}^n t_k \left\{ \frac{1+xy_k z}{1-y_k z} \right\}^\alpha, \quad \sum_{k=1}^n t_k = 1, \quad t_k \in]0,1[,$$

$$y_k \neq y_1 \quad \text{für } k \neq 1, \quad x \in \dot{X}, \quad \alpha \in [1,2] \quad \text{und } n \geq 2 .$$

Dann folgt:

$$f \notin S_0 .$$

Beweis.

Sei zunächst $\alpha = 1$. Jede der f darstellenden Funktionen bildet als Möbiustransformation \mathbb{D} auf dieselbe Halbebene H ab, $\partial\mathbb{D}$ auf ∂H und $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ auf $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{H}$. Da H , $\partial H \setminus \{\infty\}$ und auch $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{H}$ konvexe Mengen sind, bildet f auch \mathbb{D} in H , $\partial\mathbb{D}$ in ∂H und $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ in $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{H}$ ab. Als rationale Funktion vom Grad n muß schließlich f eine Abbildung sein, die jeden Wert in H genau n -mal annimmt. Für $n \geq 2$ ist f somit nicht schlicht.

Sei nun $\alpha \in]1,2]$. Habe f eine Darstellung der angegebenen Form für ein $n \geq 2$. Die darstellenden Funktionen haben alle dasselbe Bildgebiet, nämlich einen Sektor mit Ecke im Ursprung, dessen Komplement G konvex ist. Da der Ursprung ein Extrempunkt von G ist, folgt, daß $f(\partial D)$ nur Punkte aus $(G \cup \{\infty\}) \setminus \{0\}$ und somit keinen Punkt im Intervall $[0,1[$ enthält.

Nehmen wir nun an, f wäre in S_0 . Dann hätten wir wegen $0 \in \mathbb{C} \setminus fD$ und $1 \in fD$ die Beziehung $[0,1[\cap \partial fD \neq \emptyset$.

Aus der Schlichtheit und der chordalen Stetigkeit von f in \bar{D} folgt $\partial fD = f(\partial D)$, also haben wir einen Widerspruch. \square

Definieren wir für $\alpha \in]0,2]$

$$S_x^\alpha := P_x^\alpha \cap S_0 \quad \text{und} \quad S_0^\alpha := P_0^\alpha \cap S_0,$$

so erhalten wir zusammengefaßt

Satz 3.

Sei $\alpha \geq 1$. Dann gilt

- (a) $\text{Max } P_0^\alpha = E^\alpha$
 - (b) $\overline{\text{co}} P_0^\alpha = \overline{\text{co}} E^\alpha$ ($= \overline{\text{co}} S^\alpha$ falls $\alpha \leq 2$)
 - (c) $E \overline{\text{co}} P_0^\alpha \subset E^\alpha$, $E \overline{\text{co}} P_0^1 = E^1$
 - (d) $\text{Spt } P_0^\alpha \subset E^\alpha$ falls $\alpha > 1$,
- $\text{Spt } P_0^1 \subset \bigcup_{x \in X} \text{co } E_x^1$, sowie
- $\text{Spt } S^1 \subset E^1$.

Bemerkung 1.

Es ist denkbar, daß - trotz der wesentlich komplizierteren Extrempunktstruktur der Mengen P_x^α - für $\alpha < 1$ in P_0^α entsprechende Ergebnisse gelten. Allerdings müßte ein Beweis dafür völlig anders geführt werden.

Bemerkung 2.

Bei der Anwendung von Satz III 4 benutzen wir, daß für $\alpha \geq 1$ mit h_x eine Funktion mit lauter nicht-verschwindenden Koeffizienten in P_x^α liegt.

Folgerungen aus der Subordination

Wir untersuchen nun Extremalprobleme, die wir ohne Kenntnis der Extrempunkte, nur die Subordination nutzend, lösen können. Insbesondere können hier auch Ergebnisse für $\alpha < 1$ hergeleitet werden.

Wir geben drei Extremalprobleme an, die in einer kompakten Familie nur von maximalen Elementen gelöst werden.

Lemma 4.

Sei $F \subset N_0$ kompakt, und sei $r \in [0,1[$. Dann werden die Extremalprobleme

$$(i) \quad \max_{g \in F} \max_{\theta \in \mathbb{R}} |g(re^{i\theta})| ,$$

$$(ii) \quad \max_{g \in F} \max_{\theta \in \mathbb{R}} (\pm \arg g(re^{i\theta})) \quad (\text{sei immer } \arg 1 := 0) ,$$

$$(iii) \quad \max_{g \in F} \max_{z_1 \in \bar{D}_r} \max_{z_2 \in \bar{D}_r} (\arg g(z_2) - \arg g(z_1))$$

nur von maximalen Elementen gelöst.

Beweis.

(i) folgt aus dem Schwarzschen Lemma und Lemma II 1. Da für $f, g \in N_0$ die Aussagen $f < g$ und $\log f < \log g$ äquivalent sind, folgt (ii) mit derselben Argumentation.

(iii) folgt ebenfalls aus dem Schwarzschen Lemma und Lemma II 1. \square

Bemerkung.

Extremalprobleme werden in dieser Arbeit im wesentlichen konstruktiv gelöst (durch Untersuchung der maximalen Elemente), alle Resultate sind scharf und die Lösungsfunktionen der jeweiligen Konstruktion zu entnehmen. Daher wird die Schärfe in der Formulierung der Sätze nicht explizit erwähnt, und die Lösungsfunktionen werden nicht explizit angegeben.

Wir untersuchen nun die Mengen E_x^α und E^α auf die Extremalprobleme von Lemma 4 hin und gelangen dadurch zu Aussagen für P_x^α bzw. P_O^α , zum Teil sogar für $\overline{co} P_x^\alpha$ bzw. $\overline{co} P_O^\alpha$.

Satz 5.

Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$(a) \quad f \in \overline{co} P_O^\alpha \Rightarrow$$

$$|f(re^{i\theta})| \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\alpha.$$

$$(b) \quad f \in P_O^\alpha \Rightarrow$$

$$(9) \quad |\arg f(re^{i\theta})| \leq 2\alpha \arcsin r.$$

Beweis.

$$(a) \quad \text{In } \overline{co} P_O^\alpha \text{ gilt nach Lemma 4(a): } |f(re^{i\theta})| \leq \max_{\theta, \varphi} \left(\frac{1+re^{i(\theta+\varphi)}}{1-re^{i\theta}}\right)^\alpha = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\alpha.$$

$$(b) \quad \text{In } P_O^\alpha \text{ gilt nach Lemma 4(b):}$$

$$|\arg f(re^{i\theta})| \leq \alpha \left(\max_{\theta, \varphi} \arg(1+re^{i(\theta+\varphi)}) - \min_{\theta} \arg(1-re^{i\theta}) \right) = 2\alpha \arcsin r. \quad \square$$

Wir betrachten nun Argument-Probleme in den Familien P_x^α . Wegen der Asymmetrie sind diese Probleme mit größerem Rechenaufwand verbunden.

Sei im Folgenden $\varphi := \arg x \in]-\pi, \pi[$.

Satz 6.

Für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $f \in P_x^\alpha$ gilt

$$2\alpha \arg(1 - ire^{i\frac{\varphi}{2}}) \leq \arg f(re^{i\theta}) \leq 2\alpha \arg(1 + ire^{i\frac{\varphi}{2}}) .$$

Insbesondere:

$$f \in P_1^\alpha \Rightarrow |\arg f(re^{i\theta})| \leq 2\alpha \arctan r .$$

Beweis.

Wegen Lemma 4 genügt es, E_x^α zu untersuchen.
Gesucht sind

$$\max_{\theta} \min_{\theta} \arg \left(\frac{1 + re^{i(\theta+\varphi)}}{1 - re^{i\theta}} \right)^\alpha = \max_{\theta} \alpha \arg \left(\frac{1 + re^{i(\theta+\varphi)}}{1 - re^{i\theta}} \right) .$$

Sei

$$G(\theta) := \operatorname{Im} \log \frac{1 + re^{i(\theta+\varphi)}}{1 - re^{i\theta}} .$$

Wir erhalten

$$G'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta+\varphi) + \cos \theta = 0 .$$

Sei zunächst $\varphi \neq 0$. Dann ist dies weiter äquivalent zu

$$\theta + \varphi = -\theta + \pi \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} .$$

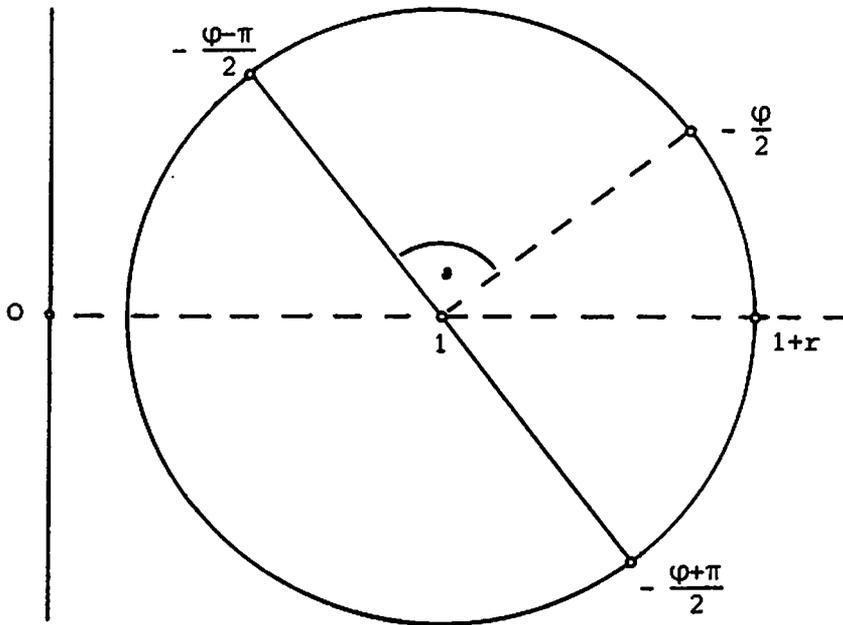
Man sieht nun leicht, daß für

$\theta = -\frac{\varphi-\pi}{2}$ ein Maximum und für $\theta = -\frac{\varphi+\pi}{2}$ ein Minimum vorliegt
und es folgt:

$$\max_{\theta} \arg \left(\frac{1 + re^{i(\theta+\varphi)}}{1 - re^{i\theta}} \right) = 2 \arg(1 + ire^{i\frac{\varphi}{2}}) \quad \text{und}$$

$$\min_{\theta} \arg \left(\frac{1 + re^{i(\theta+\varphi)}}{1 - re^{i\theta}} \right) = 2 \arg(1 - ire^{i\frac{\varphi}{2}}) .$$

Der ausgelassene Fall $\varphi = 0$ wird von der Formel ebenfalls abgedeckt. □



Bemerkung 1.

Wegen $|\frac{\varphi}{2}| < \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\arg(1 \pm ire^{i\frac{\varphi}{2}}) = \arctan \frac{\pm r \cos \frac{\varphi}{2}}{1 \mp r \sin \frac{\varphi}{2}} .$$

Bemerkung 2.

Die θ -Werte, die zum Maximum und Minimum führen, hängen nicht von r ab und stimmen mit den negativen Argumentwerten überein, die den Rand der Bildhalbebene von h_x^1 definieren, denn für $z \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\begin{aligned} (10) \quad \arg \frac{1+xz}{1-z} &= \arg(1+xz) - \arg(1-z) = \frac{\arg xz}{2} - \frac{\arg(-z)}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\arg x \pm \pi) = \frac{\varphi \pm \pi}{2} . \end{aligned}$$

Wir werfen nun die Frage auf, inwiefern diese Abschätzungen noch auf die konvexen Hüllen übertragbar sind.

Dabei erhalten wir u.a. ein Resultat, das uns zeigt, daß im allg. die Elemente der konvexen Hüllen nicht in N_0 liegen, sondern Nullstellen haben.

(Ähnliche Fragestellungen untersuchte Campbell [11]. Er betrachtete allerdings N -Familien. Dort sind ähnliche Betrachtungen für die Ableitung möglich.)

Satz 7.

Sei $F \subset N_0$ und gelte für alle $f \in F$ die scharfe Aussage

$$(11) \quad -A(r) \leq \arg f(re^{i\theta}) \leq B(r).$$

Sei ferner

$$R := \min \{r \mid A(r) + B(r) = \pi\} \cup \{1\}$$

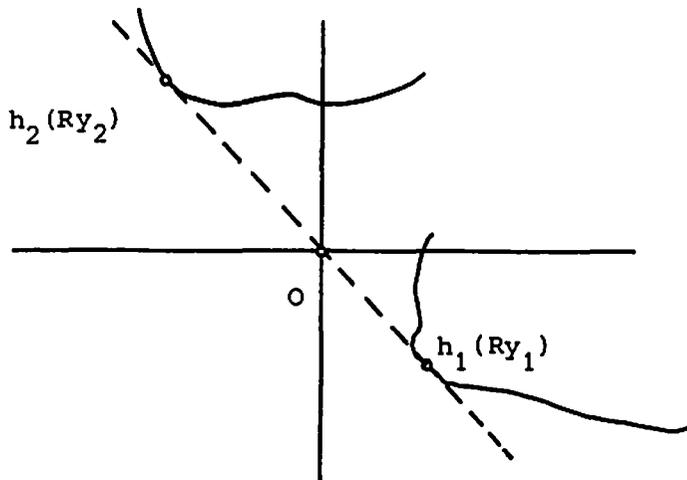
der *Halbebenen-Radius*. Dann folgt:

(a) Für alle $f \in \overline{CO} F$ und alle $r < R$ gilt (11).

(b) Ist ferner F drehungsinvariant, so gibt es ein $f \in \overline{CO} F$ mit $f(R) = 0$. Insbesondere ist $\overline{CO} F \not\subset N_0$.

Beweis.

(a) folgt sofort aus der Konvexität des für alle $r < R$ und $f \in F$ geltenden Sektors. Für $r > R$ liegt ein Sektor vor, der größer als eine Halbebene (und somit nicht mehr konvex) ist.



Für (b) benutzen wir, daß es nach Voraussetzung Funktionen $h_k \in F$ sowie $y_k \in Y$ gibt ($k \in \{1,2\}$), sodaß

$$\arg h_1(RY_1) - \arg h_2(RY_2) = \pi,$$

also

$$h_2(RY_2) = -\lambda h_1(RY_1)$$

mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Definieren wir die Funktionen g_k durch

$$g_k(z) = h_k(\gamma_k z),$$

so folgt $g_k \in F$ aus der Drehungsinvarianz von F , und

$$\frac{\lambda}{\lambda+1} g_1 + \frac{1}{\lambda+1} g_2$$

ist eine im Punkt R verschwindende konvexe Kombination. \square

Wir untersuchen nun wieder konkret die Familien P_x^α .

Satz 8.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Dann gelten:

(a) Für alle $f \in P_x^\alpha$, r_1 und $r_2 \leq r$ gilt:

$$(12) \quad |\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 2\alpha \arctan \frac{2r \cos \frac{\phi}{2}}{1-r^2}.$$

(b) Der Halbebenen-Radius R_x^α von P_x^α hat den Ausdruck

$$(13) \quad R_x^\alpha = \begin{cases} \frac{1}{R} (\sqrt{R^2 + \cos^2 \frac{\phi}{2}} - \cos \frac{\phi}{2}) & \text{für } \alpha > 1 \\ 1 & \text{für } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

mit $R := \tan \frac{\pi}{2\alpha}$.

(c) Für alle $f \in \overline{\text{co}} P_x^\alpha$ und alle $r < R_x^\alpha$, r_1 und $r_2 \leq r$ gilt:

$$2\alpha \arg(1 - ire^{i\frac{\phi}{2}}) \leq \arg f(re^{i\theta}) \leq 2\alpha \arg(1 + ire^{i\frac{\phi}{2}}).$$

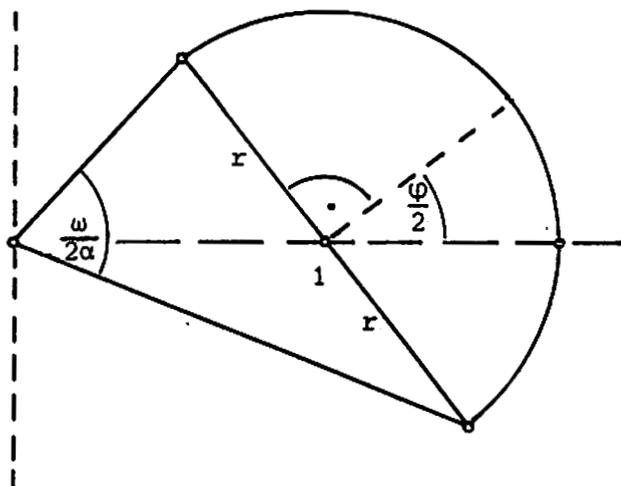
(d) Für $\alpha > 1$ gibt es eine Funktion in $\overline{\text{co}} P_x^\alpha$, die an der Stelle R_x^α verschwindet. Somit ist $\overline{\text{co}} P_x^\alpha \not\subset N_0$.

Beweis.

(a) Es ist wegen Lemma 4 wieder ausreichend, das Problem in E_X^α zu lösen. Mit Satz 6 erhalten wir

$$\begin{aligned}
 |\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| &\leq \omega(r) := \max_{z \in \bar{D}_r} \arg \left(\frac{1+xz}{1-z} \right)^\alpha \\
 &\quad - \min_{z \in \bar{D}_r} \arg \left(\frac{1+xz}{1-z} \right)^\alpha = 2\alpha \arg \frac{1+z}{1-z} \Bigg|_{z=re^{i(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2})}} \\
 &= B(r) + A(r)
 \end{aligned}$$

(zur Definition von A und B vgl. Satz 7).



Wegen der Beziehung $\arg \frac{1+z}{1-z} = \arg(1+z) - \arg(1-\bar{z})$ folgt:

$$\omega(r) = 2\alpha \arctan \frac{2r \cos \frac{\varphi}{2}}{1-r^2} .$$

(b) Sei zunächst $\alpha \leq 1$. Dann liegt das Bild von ganz D in einer Halbebene und es folgt $R_X^\alpha = 1$.

Für $\alpha > 1$ haben wir nach Satz 7 die Gleichung

$$A(R_X^\alpha) + B(R_X^\alpha) = \omega(R_X^\alpha) = \pi$$

zu lösen. Also gilt

$$2\alpha \arctan \frac{2R_x^\alpha \cos \frac{\varphi}{2}}{1 - (R_x^\alpha)^2} = \pi \Leftrightarrow R \cdot (R_x^\alpha)^2 + 2R_x^\alpha \cos \frac{\varphi}{2} - R = 0 .$$

Damit folgt die angegebene Lösung.

(c) und (d) sind nun direkte Folgerungen aus Satz 7. \square

Bemerkung.

(i) $\varphi = 0 \Rightarrow R_1^\alpha = \tan \frac{\pi}{4\alpha} ,$

(ii) $\varphi \rightarrow \pi \Rightarrow R_x^\alpha \rightarrow 1 .$

Für P_0^α folgt analog:

Satz 9.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Dann gelten:

(a) Für alle $f \in P_0^\alpha$, r_1 und $r_2 \leq r$ gilt:

$$(14) \quad |\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 4\alpha \arctan r .$$

(b) Der Halbebenen-Radius R_0^α von P_0^α hat den Ausdruck

$$(15) \quad R_0^\alpha = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{4\alpha} & \text{für } \alpha > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases} .$$

(c) Für alle $f \in \overline{\text{co}} P_0^\alpha$ und alle $r < R_0^\alpha$ gilt:

$$|\arg f(re^{i\theta})| \leq 2\alpha \arcsin r .$$

(d) Für $\alpha > \frac{1}{2}$ gibt es eine Funktion in $\overline{\text{co}} P_0^\alpha$, die an der Stelle R_0^α verschwindet.

Beweis.

(a) Wir bekommen das Resultat aus (12) durch Maximierung ($\varphi = 0$).

(b) folgt direkt aus Satz 5, weil (9) in beide Richtungen scharf ist, (c) und (d) wieder aus Satz 7. \square

Bemerkung.

Für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ bedeutet die Aussage (b), daß alle Funktionen positiven Realteil besitzen. Das letztere ist geometrisch klar.

Exponierte Punkte.

Nun wollen wir uns der Fragestellung widmen, welche der nach Satz 3 möglichen Extrempunkte von $\overline{CO} P_0^\alpha$ wirklich extrem sind. Wir werden zeigen, daß es unter den Funktionen in E^α , sogar auch für $\alpha < 1$, exponierte und daher auch extreme Punkte gibt.

Die Idee zur Vorgehensweise stammt von Pearce [32], der damit die Exponiertheit gewisser Funktionen in S zeigte, deren Bildgebiete einen geradlinigen Schlitz haben.

Aus Satz 9 wissen wir, daß in $\overline{CO} P_0^\alpha$ alle Funktionen den offenen Kreis mit Radius R_0^α in die rechte Halbebene abbilden. Dies ist eine Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Pearceschen Methode.

Hamilton [20], Theorem 1, zeigte, daß die Abschätzung (9) für $\alpha = 2$ auch in S_0 gültig ist, solange $r < 0,913\dots$, und daß nur Funktionen aus E^2 Lösung des Argumentproblems sein können, sofern $r < \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Daher gelten die folgenden Resultate auch in S_0 .

Satz 10.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und

$$G^\alpha := \left\{ f \mid f(z) = \left(\frac{1+xyz}{1-yz} \right)^\alpha, x \in X, y \in Y, |\arg x| < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}.$$

Dann gelten:

(a) Geometrische Charakterisierung: Für $\alpha \leq 2$ ist

$$G^\alpha = \left\{ f \in N_0 \mid \left. \begin{array}{l} fD \text{ ist Sektor mit Winkel } \alpha\pi, \text{ dessen Ecke im} \\ \text{Ursprung liegt und der durch Drehung des ent-} \\ \text{sprechenden symmetrischen Sektors um einen Winkel} \\ \text{von höchstens } \pi/4 \text{ entsteht.} \end{array} \right\}$$

(b) $G^\alpha \subset \text{Exp } \overline{CO} P_0^\alpha$ und

$$G^2 \subset \text{Exp } S_0 .$$

(c) $\overline{G^\alpha} \subset \overline{ECO} P_0^\alpha$,

$$\overline{G^\alpha} \subset \text{Spt } P_0^\alpha \text{ sowie}$$

$$\overline{G^2} \subset \overline{ECO} S_0 ,$$

$$\overline{G^2} \subset \text{Spt } S_0 .$$

Beweis.

(a) Diese geometrische Charakterisierung ist einfache Folge von (10).

(b) Solange $\text{Re } f(z_0) > 0$ für alle $f \in \overline{CO} P_0^\alpha$ (bzw. für alle $f \in S_0$) , also solange $|z_0| < R_0^\alpha$ (bzw. $|z_0| < \sin \frac{\pi}{8}$) , findet man in analoger Weise wie bei Pearce [32] ein Funktional vom Typ

$$L(f) := w f(z_0) \text{ mit } w \in \mathbb{C} ,$$

dessen Realteil genau gleichzeitig mit entweder $\arg f(z_0)$ oder $-\arg f(z_0)$ maximiert wird.

Nun läßt sich der Beweis von [32] auf den hier vorliegenden Fall übertragen: In P_0^α kommen als Lösungen des Argumentproblems nur maximale Elemente in Frage (Drehungsinvarianz und Lemma 4), und da in E^α genau eine Lösung existiert (siehe [32]), ist diese eindeutig (für S_0 sind nach [20] auch nur Funktionen aus E^2 mögliche Lösungen). Da andererseits jede Funktion aus G^α ein derartiges Problem löst (siehe [32]), folgt (b).

(c) folgt wie in [32]. □

Bemerkung.

Durch genaue Analyse der Schifferschen Differentialgleichung des zugehörigen Funktionals kommen Duren und Schober [15], Theorem 1

und Corollary 2, ebenfalls zu dem Ergebnis für S_0 .

Das Koeffizientenproblem.

Nun lösen wir das Koeffizientenproblem und, etwas allgemeiner, das Extremalproblem für die n -te Ableitung an einer vorgegebenen Stelle z_0 .

Im Beweis zu Satz 10 wurde gezeigt, daß die Extremalprobleme $\max \operatorname{Re} w f(z_0)$ für gewisse kleine $|z_0|$ und gewisse $w \in \mathbb{C}$ von verschiedenen Extremalfunktionen gelöst werden.

Anders ist es bei dem Problem $\max \operatorname{Re} f^{(n)}(z_0)$. Hier erweisen sich immer die "Koebe-funktionen" $h^\alpha := h_1^\alpha$ als extremal, wenn $\alpha \geq 1$ ist.

Satz 11.

Sei $\alpha \geq 1$. Dann gilt für alle $f \in \overline{\operatorname{co}} P_0^\alpha$:

- (a) $|a_n(f)| \leq a_n(h^\alpha)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (b) $|f^{(n)}(z)| \leq (h^\alpha)^{(n)}(|z|)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $z \in \mathbb{D}$.

Insbesondere für $\alpha = 1$

- (a') $|a_n(f)| \leq 2$,
- (b') $|f^{(n)}(z)| \leq 2 \frac{n!}{(1-|z|)^{n+1}}$, $|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$,

und für $\alpha = 2$

- (a'') $|a_n(f)| \leq 4n$,
- (b'') $|f^{(n)}(z)| \leq 4 \frac{n!(n+|z|)}{(1-|z|)^{n+2}}$, $|f(z)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2$.
- (c) Für die Koeffizienten $a_n := a_n(h^\alpha)$ gilt die Rekursionsformel

$$(16) \quad \begin{cases} a_0 := 1, \\ a_1 := 2\alpha, \\ a_{n+1} := \frac{1}{n+1} ((n-1)a_{n-1} + 2\alpha a_n). \end{cases}$$

Beweis.

Aharonow und Friedland [2] zeigten zum ersten Mal, daß in E^α die Koebeffunktionen die größten Koeffizienten haben (siehe auch Schober [40], S. 17). Wegen der Drehungsinvarianz sind die Probleme $\max |a_n|$ und $\max \operatorname{Re} a_n$ äquivalent und somit ist (a) bewiesen. Entwickeln wir in üblicher Weise $f^{(n)}(z)$ und schätzen mithilfe der Dreiecksungleichung ab - dies geht, da alle a_n positiv sind - so bekommen wir (b) (siehe dazu Koepf [26]). (c) Die Familie E^α hat - wie man aus der geometrischen Bedeutung sieht oder leicht analytisch verifiziert - die Darstellung

$$(17) \quad E^\alpha = \left\{ f \mid f = \frac{h^\alpha \circ l}{h^\alpha \circ l(0)}, l \in \operatorname{Möb} \mathbb{D} \right\},$$

wobei $\operatorname{Möb} \mathbb{D} := \{f \in A \mid f \text{ schlichter Automorphismus}\}$.

Also läßt sich in E^α in analoger Weise wie in S die Marty-Variation (siehe Schober [40], chapter 9) durchführen, die für einen Stützpunkt bezüglich $a_n(f)$ zu der Marty-Relation

$$(18) \quad (n+1)a_{n+1} - a_1 a_n - (n-1)\overline{a_{n-1}} = 0$$

führt.

Wir wissen wegen (a), daß h^α alle Marty-Relationen erfüllen muß, und da alle $a_n \in \mathbb{R}$, folgt (c). \square

V. Familien von Funktionen, deren Bildgebiete geometrische Eigenschaften besitzen

Der eigentliche Ausgangspunkt zu dieser Arbeit war die Fragestellung dieses Kapitels. Betrachtet man in analoger Weise wie in N Familien konvexer, sternförmiger oder nahezu-konvexer Funktionen in N_0 , so erwartet man zwar analoge Resultate in bezug auf die Extrempunkt- oder Stützpunktmengen, muß sich aber nach einer neuen Methode umsehen, die diese Resultate liefert.

Man kann aus der - auch hier möglichen - analytischen Beschreibung wegen der fehlenden Normierung des ersten Koeffizienten nicht durch Integrationen zu Ergebnissen kommen.

Da die Normierung N_0 eine geometrische Bedeutung hat, gelingt es, mit geometrischen Betrachtungen zum Ziel zu kommen.

Konvexe Funktionen

Wir betrachten die Familie

$$K_0 := K^* \cap N_0 .$$

Natürlich ist $K_0 \cup \{1\}$ eine drehungsinvariante, kompakte Teilmenge von A .

Wir benötigen folgende wohlbekannte geometrische Eigenschaft konvexer Gebiete:

Lemma 1.

Jeder Punkt des Komplements eines von \mathbb{C} verschiedenen konvexen Gebiets G liegt auf dem Rand einer Halbebene, die G enthält.

Das heißt, die geometrische Charakterisierung impliziert eine Subordinationseigenschaft, genauer, es können Aussagen über die maximalen Elemente gemacht werden. Zusammen mit der Tatsache, daß in N_0 der Wert 0 ausgelassen wird, die entsprechenden Gebiete also alle den Ursprung nicht enthalten, gelangen wir zu

Satz 2.

Max $K_0 = E^1$, also ist K_0 einfach, und es gilt $K_0 \subset S^1$.

Also lassen sich die Resultate der vorangegangenen Kapitel III und IV anwenden, und wir bekommen

Satz 3.

$$(a) \quad \overline{\text{co}} K_0 = \overline{\text{co}} E^1$$

$$(b) \quad \overline{\text{eco}} K_0 = E^1$$

$$(c) \quad \text{Spt } K_0 \subset E^1$$

$$(d) \quad G^1 \subset \text{Exp } K_0, \quad \bar{G}^1 \subset \text{Spt } K_0$$

(e) $|\arg f(re^{i\theta})| \leq 2 \arcsin r$ für alle $f \in K_0, r \in [0, 1[$,
falls $r \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}[$ auch für alle $f \in \overline{\text{co}} K_0$.

Es gibt eine Funktion in $\overline{\text{co}} K_0$, die an der Stelle $\frac{\sqrt{2}}{2}$ verschwindet.

(f) $|\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 4 \arctan r$ für alle $f \in K_0$
und alle $r_1, r_2 \leq r$.

(g) Für alle $f \in K_0, z \in \mathbb{D}$ gilt: $|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$,

$$|f^{(n)}(z)| \leq 2 \frac{n!}{(1-|z|)^{n+1}}, \text{ insbesondere } |a_n(f)| \leq 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Wir benötigen zum Beweis die Ergebnisse von Satz 2 und ferner für
(a) Satz III 1, für (b) Satz IV 1, für (c) Satz III 4 und Lemma
IV 2, für (d) Satz IV 10 (b), A9(c) sowie A5(b), für (e) Satz
IV 9 (b)-(d), für (f) Satz IV 9(a) und für (g) Satz IV 11. \square

Sternförmige Funktionen

Wir betrachten zunächst die Familie

$$\text{St}_0^1 := \text{St}^{1*} \cap N_0 .$$

Dies ist die zu St^0 analoge Familie in N_0 .

Natürlich ist $\text{St}_0^1 \cup \{1\}$ drehungsinvariant und kompakt. Nun benutzen wir die folgende geometrische Eigenschaft eines sternförmigen Gebiets.

Lemma 4.

Jeder Punkt des Komplements eines von \mathbb{C} verschiedenen sternförmigen Gebiets G bzgl. a liegt auf einem bzgl. a radialen Strahl, dessen Komplement G enthält.

Wieder impliziert also die geometrische Charakterisierung eine Subordinationseigenschaft. Mit dem Ursprung müssen im Fall $a = 1$ alle negativ reellen Werte ausgelassen werden und wir erhalten mit Satz III 6

Satz 5.

$\text{Max St}_0^1 = E_1^2$, also ist St_0^1 einfach, und es gilt $\text{St}_0^1 \subset S_1^2$.

Satz 6.

(a) $\overline{\text{co St}_0^1} = \overline{\text{co E}_1^2}$

(b) $E\overline{\text{co St}_0^1} = \text{Spt St}_0^1 = \text{Exp St}_0^1 = E_1^2$

(c) $|\arg f(re^{i\theta})| \leq 4 \arctan r$ für alle $f \in \text{St}_0^1$, $r \in [0, 1[$, falls $r \in [0, \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1[$ auch für alle $f \in \overline{\text{co St}_0^1}$.

Es gibt eine Funktion in $\overline{\text{co St}_0^1}$, die an der Stelle $\tan \frac{\pi}{8}$ verschwindet.

(d) Für alle $f \in \text{St}_0^1$, $z \in \mathbb{D}$ gilt: $|f(z)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2$,

$$|f^{(n)}(z)| \leq 4n! \frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}}, \text{ insbesondere } |a_n(f)| \leq 4n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Wir benötigen zum Beweis die Ergebnisse von Satz 5 und ferner für (a) Satz III 1, für (b) Satz III 4, Lemma IV 2 und die Beziehung

$$E_1^2 \stackrel{\text{II5(d)}}{\subset} \overline{E_0} \text{St}_0^1 \stackrel{\text{III1}}{\subset} E_1^2,$$

Exponiertheit liegt bzgl. der Drehungen von $a_1(f)$ vor, für (c) brauchen wir Satz IV 8 (b)-(d) und für (d) Satz IV 11. \square

Nun heben wir die Sonderstellung des Punktes 1 auf und betrachten beliebige sternförmige Gebiete, die den Ursprung nicht enthalten. Die entsprechende Familie N_0 -normierter Funktionen bezeichnen wir mit

$$\text{St}_0 := \{f \in S_0 \mid f \text{ sternförmig}\}.$$

$\text{St}_0 \cup \{1\}$ ist drehungsinvariant und kompakt.

Mit Hilfe der geometrischen Beschreibung sternförmiger Gebiete nach Lemma 4 sehen wir wegen der Ausnahmestellung des Ursprungs, daß jedes solche sternförmige Gebiet in einem Gebiet mit geradlinigem Schlitz liegt, der im Ursprung beginnt, und wir erhalten mit Satz III 6:

Satz 7.

$\text{Max St}_0 = E^2$, also ist St_0 einfach und es gilt $\text{St}_0 \subset S^2$.

Satz 8.

(a) $\overline{\text{co}} \text{St}_0 = \overline{\text{co}} E^2$

(b) $E\overline{\text{co}} \text{St}_0 \subset E^2$

(c) $\text{Spt} \text{St}_0 \subset E^2$

(d) $G^2 \subset \text{Exp} \text{St}_0, \bar{G}^2 \subset \text{Spt} \text{St}_0$

(e) $|\arg f(re^{i\theta})| \leq 4 \arcsin r$ für alle $f \in \text{St}_0, r \in [0,1[$,

falls $r \in [0, \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}[$ auch für alle $f \in \overline{\text{co}} \text{St}_0$.

Es gibt eine Funktion in $\overline{\text{co}} \text{St}_0$, die an der Stelle $\sin \frac{\pi}{8}$ verschwindet.

(f) $|\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 8 \arctan r$ für alle $f \in \text{St}_0$ und alle $r_1, r_2 \leq r$.

(g) Für alle $f \in \text{St}_0, z \in \mathbb{D}$ gilt: $|f(z)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2$,

$$|f^{(n)}(z)| \leq 4n! \frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}}, \text{ insbesondere } |a_n(f)| \leq 4n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Wir benötigen zum Beweis die Ergebnisse von Satz 7 und ferner für (a) und (b) Satz III 1, für (c) Satz III 4 und Lemma IV 2, für (d) Satz IV 10 (b), A9(c) sowie A5(b), für (e) Satz IV 9 (b)-(d), für (f) Satz IV 9(a) und für (g) Satz IV 11. \square

Bemerkung.

Im Gegensatz zu N gelingt es also hier, mit der verwendeten geometrischen Methodik zu genauen Resultaten zu gelangen. Analytisch sind sternförmige Funktionen bezüglich anderer Punkte als den Bildpunkt des Ursprungs schwieriger zu fassen.

Nahezu-konvexe Funktionen

Wir betrachten die Familien

$$C_0(\beta) := C^*(\beta) \cap N_0 \quad \text{für } \beta \in \mathbb{R}^+ .$$

$C_0(\beta) \cup \{1\}$ ist drehungsinvariant und kompakt.

Für $\beta \in [0,1]$ sind alle nahezu-konvexen Funktionen schlicht, und es existiert eine genaue geometrische Beschreibung der Bildgebiete (siehe Pommerenke [36]).

Satz 9.

Sei $\beta \in [0,1]$.

Das Komplement eines nahezu-konvexen Gebiets der Ordnung β ist die disjunkte Vereinigung von Strahlen.

Mit jedem dieser Strahlen ist ein voller symmetrischer Sektor vom Winkel $(1-\beta)\pi$ im Komplement enthalten.

Nun lassen sich in derselben Art wie zuvor unter Anwendung von Satz III 6 wegen der Sonderstellung des ausgelassenen Ursprungs folgende geometrische Aussagen notieren.

Satz 10.

Sei $\beta \in [0,1]$. Dann gilt

$\text{Max } C_0(\beta) = E^{\beta+1}$, also ist $C_0(\beta)$ einfach, und es gilt

$$C_0(\beta) \subset S^{\beta+1} .$$

Satz 11.

Sei $\beta \in [0,1]$. Dann gilt

$$(a) \quad \overline{CO} C_0(\beta) = \overline{CO} E^{\beta+1}$$

$$(b) \quad E \overline{CO} C_0(\beta) \subset E^{\beta+1}$$

$$(c) \quad \text{Spt } C_0(\beta) \subset E^{\beta+1}$$

$$(d) \quad G^{\beta+1} \subset \text{Exp } C_0(\beta) \quad , \quad \overline{G^{\beta+1}} \subset \text{Spt } C_0(\beta)$$

$$(e) \quad |\arg f(re^{i\theta})| \leq 2(\beta+1) \arcsin r \quad \text{für alle } f \in C_0(\beta), r \in [0,1[\quad ,$$

falls $r \in [0, \sin \frac{\pi}{4(\beta+1)}[$ auch für alle $f \in \overline{C_0}(\beta)$.

Es gibt eine Funktion in $\overline{C_0}(\beta)$, die an der Stelle $\sin \frac{\pi}{4(\beta+1)}$ verschwindet.

$$(f) \quad |\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 4(\beta+1) \arctan r$$

für alle $f \in C_0(\beta)$ und alle $r_1, r_2 \leq r$.

(g) Für alle $f \in C_0(\beta)$, alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{D}$ gilt:

$$|f^{(n)}(z)| \leq (h_1^{\beta+1})^{(n)}(|z|) .$$

Beweis.

Der vorliegende Satz wird ganz analog zu Satz 8 mit den Ergebnissen aus den Kapiteln III und IV bewiesen. □

Bemerkung 1.

Nach 8a und 11a gilt $\overline{C_0}(\beta) = \overline{St_0}$, nach 11g ist in $C_0(\beta)$ die Koeffizienten-Vermutung

$$\max_{f \in C_0(\beta)} |a_n| = 4n$$

richtig.

Bemerkung 2.

Definiert man

$$D_0 := \{f \in \mathbb{N}_0 \mid \mathbb{C} \setminus f\mathbb{D} \text{ ist die Vereinigung von Halbstrahlen} \} ,$$

verlangt man also nicht die Disjunktheit der Vereinigung, so folgt dennoch: $\text{Max } D_0 = E^2$ und somit $\overline{D_0} = \overline{C_0}(\beta)$.

(f) $|\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 2k \cdot \arctan r$ für alle $f \in V_0(k)$ und alle $r_1, r_2 \leq r$.

(g) Für alle $f \in V_0(k)$, alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{D}$ gilt:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \left(\frac{k}{h_1^2}\right)^{(n)} (|z|).$$

Bemerkung.

Wie im Fall der Normierung N für $k \geq 4$ bewiesen wurde, ist dort $\overline{co} C\left(\frac{k}{2} - 1\right) = \overline{co} V(k)$ (siehe Schober [40], S. 25).

Nach 11a und 14a gilt für $k \in [2, 4]$: $\overline{co} C_0\left(\frac{k}{2} - 1\right) = \overline{co} V_0(k)$.

Konvexe Funktionen in Richtung der imaginären Achse

Wir betrachten die Familie

$$KI_0 := KI^* \cap N_0.$$

$KI_0 \cup \{1\}$ ist drehungsinvariant und kompakt.

Aus der Definition und Satz III 6 folgt sofort:

Satz 15.

$\text{Max } KI_0 = E_1^2 \cup E_{-1}^2$, also ist KI_0 einfach, und es gilt $KI_0 \subset S_1^2 \cup S_{-1}^2$.

Satz 16.

(a) $\overline{co} KI_0 = \overline{co}(E_1^2 \cup E_{-1}^2)$

(b) $E\overline{co} KI_0 = \text{Max } KI_0$

(c) $\text{Spt } KI_0 = \text{Max } KI_0$

(d) $|\arg f(re^{i\theta})| \leq 4 \operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{2}}{r} - 1\right)$

für alle $f \in KI_0$ und $r \in [0, 1[$,

falls $r \in [0, \sqrt{2}-1[$ auch für alle $f \in \overline{co} KI_0$.

Es gibt eine Funktion in $\overline{co} KI_0$,

die an der Stelle $\sqrt{2}-1$ verschwindet.

$$(e) \quad |\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 4 \arctan \frac{\sqrt{2} r}{1-r^2}$$

für alle $f \in KI_{\circ}$ und alle $r_1, r_2 \leq r$.

(f) Für alle $f \in KI_{\circ}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n(f)| \leq 2\sqrt{1+n^2}.$$

Beweis.

(a) folgt wie üblich aus Satz 15 und Satz III 1,

(b) " \subset " folgt aus Satz III 1, " \supset " aus der Drehungsinvarianz und der Spiegelungsinvarianz von KI_{\circ} (mit $f \in KI_{\circ}$ ist auch $g \in KI_{\circ}$, wobei $g(z) = f(\bar{z})$), denn wäre eine Funktion aus $E_i^2 \cup E_{-i}^2$ nicht extrem in $\overline{co} KI_{\circ}$, so auch alle anderen, im Widerspruch zu Krein-Mil'man.

(c) " \subset " folgt aus Satz III 4, " \supset " sieht man durch Betrachtung der Funktionale vom Typ $L(f) = wa_1(f)$, $w \in \mathbb{C}$.

(d) Wegen der Spiegelungsinvarianz von KI_{\circ} genügt es zu zeigen, daß

$$\max_{f \in KI_{\circ}} \max_{\theta \in \mathbb{R}} \arg f(re^{i\theta}) = 4 \operatorname{arccot} \left(\frac{\sqrt{2}}{r} - 1 \right).$$

Wir wissen wegen Satz 15 und Satz IV 6, daß gilt

$$\begin{aligned} \max_{f \in KI_{\circ}} \max_{\theta \in \mathbb{R}} \arg f(re^{i\theta}) &= 4 \arctan \frac{r \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - r \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= 4 \arctan \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{r} - 1} = 4 \operatorname{arccot} \left(\frac{\sqrt{2}}{r} - 1 \right). \end{aligned}$$

Dies gilt auch für $f \in \overline{co} KI_{\circ}$, solange r kleiner als der Halbebene radius R ist, für den gilt:

$$4 \operatorname{arccot} \left(\frac{\sqrt{2}}{R} - 1 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Dies führt zu $R = \sqrt{2} - 1$.

Der Rest folgt wieder mit Satz IV 7.

(e) folgt aus Satz IV 8.

(f) Für $g(z) = \left(\frac{1 \pm iy z}{1 - y z}\right)^2$, also $g \in E_1^2 \cup E_{-1}^2$ gilt

$$a_n(g) = 2y^n(1 \pm ni) .$$

Wegen (c) folgt also

$$|a_n(f)| \leq 2\sqrt{1+n^2} \quad \text{für alle } f \in KI_0 .$$

Es ist leicht zu sehen, daß für jedes n ein y existiert, bei dem der maximale Wert angenommen wird.

Allerdings ist dies im Gegensatz zu den bisherigen Ergebnissen nicht für jedes n dasselbe y . □

Funktionen mit symmetrischen Bildgebieten

In Analogie zu den Funktionen aus N mit reellen Koeffizienten stehen in N_0 Funktionen mit symmetrischem Bildgebiet bzgl. der reellen Achse.

Aus $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ und der Schlichtheit folgt nämlich die Äquivalenz dieser beiden Forderungen.

Wir schreiben für beliebiges $F \subset N_0$

$F(\text{sym}) := \{f \in F \mid fD \text{ symmetrisch bzgl. der reellen Achse}\} .$

Wir erhalten mittels der Geometrie und Satz III 6 folgenden Satz:

Satz 17:

(a) $\text{Max } K_0(\text{sym}) = \text{Max } KI_0(\text{sym}) = E_1^1 ,$

die Familien sind einfach, und es gilt:

$$K_0(\text{sym}) \subset KI_0(\text{sym}) \subset S_1^1 \subset P ,$$

(b) $\text{Max } S_0(\text{sym}) = \text{Max } St_0^1(\text{sym}) = \text{Max } St_0(\text{sym}) = E_1^2 ,$

die Familien sind einfach, und es gilt:

$$St_0^1(\text{sym}) \subset St_0(\text{sym}) \subset S_0(\text{sym}) \subset S_1^2 .$$

(c) $\text{Max } C_0(\alpha-1, \text{sym}) = \text{Max } V_0(2\alpha, \text{sym}) = E_1^\alpha$ für $\alpha \in [1, 2]$,
 die Familien sind einfach, und es gilt:
 $V_0(2\alpha, \text{sym}) \subset C_0(\alpha-1, \text{sym}) \subset S_1^\alpha$.

Nun bekommen wir wieder Extrempunkt- und Verzerrungsaussagen.

Satz 18.

(a) $\overline{\text{co}} K_0(\text{sym}) = \overline{\text{co}} KI_0(\text{sym}) = \overline{\text{co}} E_1^1 = P$

(b) $E\overline{\text{co}} K_0(\text{sym}) = E\overline{\text{co}} KI_0(\text{sym}) = E_1^1$

(c) $\text{Spt } K_0(\text{sym}) = \text{Spt } KI_0(\text{sym}) = E_1^1$

(d) $\text{Exp } K_0(\text{sym}) = \text{Exp } KI_0(\text{sym}) = E_1^1$

(e) $|\arg f(re^{i\theta})| \leq 2 \arctan r$

für alle $f \in \overline{\text{co}} KI_0(\text{sym})$, $r \in [0, 1[$.

(f) Für alle $f \in KI_0(\text{sym})$, $z \in \mathbb{D}$ gilt: $|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$,

$$|f^{(n)}(z)| \leq 2 \frac{n!}{(1-|z|)^{n+1}}, \text{ insbesondere } |a_n(f)| \leq 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 19.

Für $S_0(\text{sym})$, $St_0^1(\text{sym})$ sowie $St_0(\text{sym})$ gilt vollständig Satz 6,
 wobei St_0^1 durch die hier genannten Mengen ersetzt wird.

Satz 20.

Sei $\alpha \in [1, 2]$. Dann gilt

(a) $\overline{\text{co}} C_0(\alpha-1, \text{sym}) = \overline{\text{co}} V_0(2\alpha, \text{sym}) = \overline{\text{co}} E_1^\alpha$

(b) $E\overline{\text{co}} C_0(\alpha-1, \text{sym}) = E\overline{\text{co}} V_0(2\alpha, \text{sym}) = E_1^\alpha$

(c) $\text{Spt } C_0(\alpha-1, \text{sym}) = \text{Spt } V_0(2\alpha, \text{sym}) = E_1^\alpha$

(d) $\text{Exp } C_0(\alpha-1, \text{sym}) = \text{Exp } V_0(2\alpha, \text{sym}) = E_1^\alpha$

(e) $|\arg f(re^{i\theta})| \leq 2\alpha \arctan r$

für alle $f \in C_0(\alpha-1, \text{sym})$, $r \in [0, 1[$,

falls $r \in [0, \tan \frac{\pi}{4\alpha}[$ auch für alle $f \in \overline{C_0}(\alpha-1, \text{sym})$.

Es gibt eine Funktion in $\overline{C_0}(\alpha-1, \text{sym})$, die an der Stelle $\tan \frac{\pi}{4\alpha}$ verschwindet.

(f) Für alle $f \in C_0(\alpha-1, \text{sym})$, alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{D}$ gilt:

$$|f^{(n)}(z)| \leq (h^\alpha)^{(n)}(|z|).$$

Beweis.

Die Sätze 18 bis 20 werden analog zu Satz 6 bewiesen. □

VI. Familien von Funktionen mit reellen Koeffizienten

Sei für eine Menge $F \subset N_0$

$$F(R) := \{f \in F \mid a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Hallenbeck und MacGregor [19] zeigten vor kurzem

Satz 1 (siehe [19], S. 528 und Theorem 9).

$$(a) \quad EP(R) = \{f \mid f(z) = \frac{1-z^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}, y \in Y\} \text{ und}$$

$$\text{Spt } P(R) = \text{co } EP(R).$$

(b) Für $\alpha > 1$ ist

$$\text{Spt } P_1^\alpha(R) = \overline{\text{co}} P_1^\alpha(R) = (EP(R))^\alpha.$$

Bemerkung.

Die Extrempunkte von $P(R)$ bestehen aus den beiden maximalen Elementen $\frac{1+z}{1-z}$ und $\frac{1-z}{1+z}$, sowie aus einem Teil derjenigen Funktionen, die jeden Punkt der rechten Halbebene genau zweimal annehmen. Dies ergibt sich aus der Rationalität 2. Grades und der Tatsache, daß für $z \in \partial D$

$$\text{Re } \frac{1-z^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} = 0$$

ist.

Allerdings sind nicht alle Funktionen mit dieser Eigenschaft extrem. Z.B. ist zwar $\frac{1-z^2}{1+z^2}$ (für $y := i$) extrem, aber

$$\frac{1+z^2}{1-z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)$$

hat eine konvexe Darstellung in $P(R)$.

Da die Extrempunkte nicht alle schlicht sind, kann die gewonnene Darstellung nicht dazu benutzt werden, die Extrempunkte in

$P(R) \cap S_0$ oder in $P(R) \cap K_0 = K_0(R)$ anzugeben.

Aus der Symmetrie zur reellen Achse folgt $P_0^1(R) = P_1^1(R)$ und damit auch $P_0^\alpha(R) = (P_0^1(R))^\alpha = (P_1^1(R))^\alpha = P_1^\alpha(R)$.
Damit beinhaltet Satz 1 bereits alles über die Extremalstruktur von $P_0^\alpha(R)$, $\alpha \geq 1$.

Wir wenden uns jetzt der Menge $S_0(R)$ zu. Da in $P_0^2(R)$, einer Obermenge von $S_0(R)$, auch nicht-schlichte Funktionen Extrempunkte sind, können die Ergebnisse nicht übertragen werden. Wir wenden eine Idee von Brickman an, um die Extrempunkte von $S_0(R)$ geometrisch zu charakterisieren.

Satz 2.

Läßt $f \in S_0(R)$ einen Wert $a \notin \mathbb{R}$ aus, so hat f eine konvexe Darstellung mit zwei verschiedenen Funktionen aus $S_0(R)$, die offene Mengen auslassen.

Beweis.

Wegen der Symmetrie des Bildgebiets zur reellen Achse folgt, daß auch \bar{a} nicht angenommen wird. Da $a \notin \mathbb{R}$, kennen wir nun zwei nicht angenommene Punkte, die auf einer Ellipse mit Brennpunkten in 0 und 1 liegen, und wir können die Methode von Brickman ([5], siehe DS [14], Theorem 1) anwenden. Somit hat f die Darstellung

$$f = t f_1 + (1-t) f_2 \quad \text{mit } t \in]0,1[\quad \text{und}$$

$$f_k := \psi_k \circ f \in S_0, \quad \psi_{1,2}(w) := \frac{w \pm \psi(w) \mp \psi(0)}{1 \pm \psi(1) \mp \psi(0)}$$

mit

$$\psi(w) := \sqrt{(w-a)(w-\bar{a})}.$$

Wir brauchen nun nur zu zeigen, daß f_k oder äquivalent dazu ψ (entwickelt um den Punkt 1) reelle Koeffizienten hat. Nun ist aber für $w \in \mathbb{R}$

$$\psi(w) = \pm |w-a| \in \mathbb{R},$$

woraus diese Behauptung folgt. □

Satz 3.

$$\begin{aligned} \overline{\text{co}} S_0(\mathbb{R}) &\subset E(S_0(\mathbb{R}) \cup \{1\}) \\ &= \left\{ f \in S_0(\mathbb{R}) \mid f(z) = \frac{(1 \pm z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}, y \in Y \right\} =: \Omega. \end{aligned}$$

Beweis.

Wegen Satz 2 läßt ein Extrempunkt von $S_0(\mathbb{R})$ nur reelle Werte aus.

Mit dem Ursprung müssen automatisch alle negativ reellen Werte ausgelassen werden. Es gibt zwei zusätzliche Möglichkeiten:

$$(1)]-\infty, \varepsilon] \subset \mathbb{C} \setminus f\mathbb{D} \quad \text{für ein } \varepsilon \in]0, 1[$$

und/oder

$$(2) [1+\varepsilon, \infty[\subset \mathbb{C} \setminus f\mathbb{D} \quad \text{für ein } \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Wir zeigen nun, daß ein Extrempunkt von $S_0(\mathbb{R}) \cup \{1\}$ die Eigenschaft (1) nicht besitzt. Jede Funktion g aus $S_0(\mathbb{R})$, die nur reelle Werte ausläßt und die Eigenschaft (1) besitzt, hat offenbar wegen der Normierung die Darstellung

$$g = \frac{f+\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot f + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot 1,$$

wobei f ebenfalls in $S_0(\mathbb{R})$ liegt und nur reelle Werte ausläßt. Dies ist aber eine konvexe Darstellung innerhalb $S_0(\mathbb{R}) \cup \{1\}$ (und damit in $\overline{\text{co}} S_0(\mathbb{R})$).

Es sind also nur Funktionen aus der Menge

$$\left\{ f \in S_0(\mathbb{R}) \mid f \text{ läßt die negative reelle Achse und höchstens einen weiteren Strahl auf der reellen Achse aus} \right\}$$

mögliche Extrempunkte. Man weist leicht die Gleichheit dieser Menge mit Ω nach. □

Auf gleiche Weise folgt das Ergebnis für $S(R)$.

Korollar 4.

$$\overline{E\mathcal{C}O} S(R) = ES(R) = \left\{ f \in N \mid f(z) = \frac{z}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}, y \in Y \right\}.$$

Beweis.

Die Inklusionskette

$$\overline{E\mathcal{C}O} S(R) \subset ES(R) \subset \left\{ f \in N \mid f(z) = \frac{z}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}, y \in Y \right\} =: I$$

folgt aus den Überlegungen von Satz 2 mit der Brickman-Darstellung von Funktionen in S (siehe Duren [13], Theorem 9.5). I ist genau die Menge aller Funktionen aus $S(R)$, die nur reelle Werte auslassen.

$I \subset \overline{E\mathcal{C}O} S(R)$ folgt aus Satz 1(a), da die dort auftretende Extrempunktmenge dieselbe Abhängigkeit von dem Parameter y besitzt (siehe BMW [9], Theorem 1(d)). \square

Bemerkung.

Die Aussage $\overline{E\mathcal{C}O} S(R) = I$ wurde von BMW [9], Theorem 4, mit anderen Methoden hergeleitet.

Wir wenden uns nun wieder der Stützpunktfrage zu.

Satz 5.

$$\text{Sei } \tilde{\Omega} := \Omega \cup \left\{ f \in S_0(R) \mid \begin{array}{l} f(z) = 1 + \kappa \frac{z}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}, y \in Y, \\ \kappa \in]-2(1-\operatorname{Re} y), 2(1+\operatorname{Re} y)[\end{array} \right\}.$$

Dann gilt

$$\operatorname{Spt} S_0(R) \subset \tilde{\Omega}.$$

Beweis.

Der Beweis wird analog zu Satz III 3 geführt. Sei $L \in A'$ nicht konstant in $S_0(R)$.

Für einen Stützpunkt $g \in S_0(R)$ bzgl. L gilt

$$(3) \quad M := \operatorname{Re} Lg = \max_{h \in S_0(R)} \operatorname{Re} Lh .$$

Wegen der Vorgabe über die Extrempunkte nach Satz 3 hat g die Choquet-Darstellung

$$(4) \quad g(z) = \int_Y \frac{(1+z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} d\mu_+ + \int_Y \frac{(1-z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} d\mu_-$$

mit positiven Maßen μ_+ und μ_- , $\mu_+(Y) + \mu_-(Y) = 1$, deren Träger in $\left\{ y \in Y \mid \frac{(1\pm z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} \in \overline{\operatorname{Eco}} S_0(R) \right\}$ liegen.

Hieraus folgt, daß μ_+ -fast überall bzw. μ_- -fast überall auf Y gilt

$$(5) \quad \operatorname{Re} L \left(\frac{(1+z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} \right) = M \quad \text{sowie}$$

$$\operatorname{Re} L \left(\frac{(1-z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} \right) = M .$$

Seien H_{\pm} die Teilmengen von Y , in denen (5) gilt.

Die Funktionen ℓ_{\pm} , die durch

$$\ell_{\pm}(y) := L \left(\frac{(1\pm z)^2}{(1-yz)(1-\frac{z}{y})} \right)$$

definiert werden, sind wegen der Darstellbarkeit von L mittels eines Maßes mit kompaktem Träger in \mathbb{D} analytisch in einer Umgebung von Y als Funktionen von y .

Nehmen wir nun an, z.B. H_+ habe unendlich viele Elemente. Dann folgt wegen (5) mit der verallgemeinerten Argumentation von Satz III 3 (siehe Hallenbeck und MacGregor [19], Theorem 9) die Konstanz von l_+ . Daraus folgt aber, daß die Toeplitz-Koeffizienten b_k von L für $k \geq 2$ alle verschwinden. Dies ist ein Widerspruch zur Nicht-Konstanz von L in $S_0(R)$.

Also sind H_+ sowie H_- endlich, und (4) wird zu einer endlichen konvexen Darstellung mit Punkten aus $\overline{E_0} S_0(R)$.

Sobald allerdings eine echte Darstellung mit mindestens zwei Punkten vorliegt, ist die dargestellte Funktion g entweder nicht schlicht, da g Pole auf ∂D mit einer Gesamtordnung von mindestens vier hat (siehe BMW [9], Theorem 12), oder g ist von der Form $(t \in]0,1[)$

$$g(z) = t \frac{(1+z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} + (1-t) \frac{(1-z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}$$

$$= 1 + (4t-2+2\operatorname{Re} y) \frac{z}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} .$$

Da g in N_0 liegt, folgt dann die angegebene Darstellung. \square

Bemerkung.

Eine entsprechende Aussage für $S(R)$ wurde von BMW [9], Theorem 12 bewiesen.

Zum Schluß vermerken wir, daß aus der Sternförmigkeit und Nahezu-Konvexität der Elemente aus $\tilde{\Omega}$ folgt:

Korollar 6.

$$(a) \quad \operatorname{St}_0^1(R) \subset \operatorname{St}_0(R) \subset V_0(4,R) \subset C_0(1,R) \subset S_0(R) ,$$

$$(b) \quad \overline{\operatorname{co}} \operatorname{St}_0^1(R) = \overline{\operatorname{co}} \operatorname{St}_0(R) = \overline{\operatorname{co}} V_0(4,R) = \overline{\operatorname{co}} C_0(1,R) = \overline{\operatorname{co}} S_0(R)$$

und daher

$$(c) \quad \overline{\text{Eco}} \text{St}_0^1(\mathbb{R}) = \overline{\text{Eco}} \text{St}_0(\mathbb{R}) = \overline{\text{Eco}} V_0(4, \mathbb{R}) = \overline{\text{Eco}} C_0(1, \mathbb{R}) = \overline{\text{Eco}} S_0(\mathbb{R}) \subset \Omega$$

sowie

$$(d) \quad \text{Spt} \text{St}_0^1(\mathbb{R}) = \text{Spt} \text{St}_0(\mathbb{R}) = \text{Spt} V_0(4, \mathbb{R}) = \text{Spt} C_0(1, \mathbb{R}) = \text{Spt} S_0(\mathbb{R}) \subset \tilde{\Omega}.$$

Beweis.

Aus A6 folgt (b) und hieraus (c) mithilfe Satz 3.

(d) Da alle auftretenden Mengen F dieselbe abgeschlossene konvexe Hülle haben, folgt aus den Überlegungen in A9(b): $\text{Spt} F \subset \text{Spt} S_0(\mathbb{R})$. Jeder Stützpunkt bzgl. L von $S_0(\mathbb{R})$ ist wegen $\tilde{\Omega} \subset F$ auch in F Stützpunkt bzgl. L , wenn L nicht konstant in F ist.

Nun folgt unsere Behauptung, wenn wir zeigen, daß in $\text{St}_0^1(\mathbb{R})$ nur die trivialen Funktionale $L(f) = b_0 a_0(f)$ konstant sind.

Habe das in $\text{St}_0^1(\mathbb{R})$ konstante Funktional $L \in A'$ die Toeplitz-Koeffizienten b_n . Da für kleine $a_1 \in \mathbb{R}^+$ die Funktion f mit $f(z) = 1 + a_1 z$ in $\text{St}_0^1(\mathbb{R})$ liegt, folgt $b_1 = 0$, ebenso liegen für alle $n \geq 2$ die Funktionen f_ε mit $f_\varepsilon(z) = 1 + a_1 z + \varepsilon z^n$ für kleine $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ in $\text{St}_0^1(\mathbb{R})$, woraus folgt, daß alle Toeplitz-Koeffizienten b_n , $n \geq 1$ verschwinden. \square

AnhangDie Sätze von Kreĭn-Mil'man und Choquet

Sei immer V ein lokal-konvexer Vektorraum, $F, G, \dots \subset V$.

KM 1 Kreĭn-Mil'man

F kompakt $\Rightarrow \overline{\text{co}} F = \overline{\text{co}} EF$, insbesondere $EF \neq \emptyset$.

KM 2 Mil'man

F und $\overline{\text{co}} F$ kompakt $\Rightarrow E\overline{\text{co}} F \subset F$.

Ch 3 Choquet

V metrisierbar, F kompakt und konvex \Rightarrow

$$F = \left\{ f \mid f = \int_{EF} g \, d\mu_f, \mu_f \in \text{PM}(EF) \right\}$$

mit $\text{PM}(EF) := \{ \mu \mid \mu \text{ Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß über } EF \}$

Folgerungen und weitere AussagenA 4

F und $\overline{\text{co}} F$ kompakt $\Rightarrow E\overline{\text{co}} F \subset EF$.

Beweis.

Anwendung von 2 zusammen mit 5(a). □

A 5

$F \subset G \Rightarrow$

(a) $EG \cap F \subset EF$

(b) $L \in V'$ nicht const. in $F \Rightarrow (\text{Spt}_L G) \cap F \subset \text{Spt}_L F$

(c) $\text{Exp } G \cap F \subset \text{Exp } F$

Beweis.

(a) Für $f \in F$ gilt: $f \notin EF \Rightarrow f \notin EG$.

(b) und (c) Sei $f \in F \wedge f \in \text{Exp}^{\text{Spt}_L} G$, dann gilt:

$$\forall g \in G \setminus \{f\} \quad (\text{Re } Lf \stackrel{>}{\geq} \text{Re } Lg) ,$$

insbesondere gilt dies für alle $g \in F \setminus \{f\}$, also ist $f \in \text{Exp}^{\text{Spt}_L} F$. \square

A 6

$F \subset G$, F kompakt und konvex, G und $\overline{\text{co}} G$ kompakt \Rightarrow

$$(EG \subset F \Rightarrow F = G).$$

Beweis.

Nach Voraussetzung gilt: $EG \stackrel{5}{\subset} EF = \overline{\text{co}} F \wedge \overline{\text{co}} G \stackrel{4}{\subset} EG \Rightarrow$

$$\overline{\text{co}} G \subset \overline{\text{co}} F \Rightarrow \overline{\text{co}} \overline{\text{co}} G \subset \overline{\text{co}} \overline{\text{co}} F \stackrel{1}{\Rightarrow} \overline{\text{co}} G \subset F . \quad \square$$

A 7

F und $\overline{\text{co}} F$ kompakt, $L \in V'$ und sei $F = \bigcup_{t \in T} F_t$. Dann gilt

$$(a) \quad EF \subset \bigcup_{t \in T} EF_t$$

$$(b) \quad \overline{\text{co}} F \subset \bigcup_{t \in T} \overline{\text{co}} F_t .$$

$$(c) \quad \forall t \in T (L \neq \text{const. in } F_t) \Rightarrow (\text{Spt}_L F \subset \bigcup_{t \in T} \text{Spt}_L F_t)$$

$$(d) \quad \text{Exp } F \subset \bigcup_{t \in T} \text{Exp } F_t .$$

Beweis.

(a) $f \in F_t \setminus EF_t \Rightarrow f$ hat eine konvexe Darstellung in F_t , also in $F \Rightarrow f \notin EF$.

(b) Sei $f \in \overline{\text{co}} F$. Dann folgt wegen KM 2: $f \in F$.

Somit gibt es ein $t \in T$ mit $f \in \overline{\text{co}} F_t$. Wäre nun $f \notin \overline{\text{co}} F_t$, so bekämen wir eine Darstellung in $\overline{\text{co}} F_t$, und damit einen Widerspruch.

(c) und (d) Sei $f \in \text{Exp}^{\text{Spt}_L} F$. Für ein $t \in T$ gilt $f \in F_t$, also

$\forall g \in F_t \setminus \{f\} (\operatorname{Re} Lf \stackrel{\geq}{>} \operatorname{Re} Lg) ,$
 d.h. $f \in \operatorname{Exp}_{\operatorname{Spt}_L} F_t .$ □

A 8

F und $\overline{\operatorname{co}} F$ kompakt $\Rightarrow \overline{\operatorname{Eco}} F \subset \overline{\operatorname{Spt}} F .$

Beweis (BW [10], S. 231).

Zunächst ist $F \subset \overline{\operatorname{co}} \operatorname{Spt} F$ mit Beweis wie für KM 1 (genauer gilt sogar $F \subset \overline{\operatorname{co}} (\operatorname{Spt} F \cap \overline{\operatorname{Eco}} F)$). Daraus folgt $\overline{\operatorname{co}} \operatorname{Spt} F = \overline{\operatorname{co}} F$ und wegen der Kompaktheit von $\overline{\operatorname{Spt}} F$ sowie $\overline{\operatorname{co}} \operatorname{Spt} F$ erhalten wir mit KM 2: $\overline{\operatorname{Eco}} \overline{\operatorname{Spt}} F \subset \overline{\operatorname{Spt}} F .$ □

A 9

F und $\overline{\operatorname{co}} F$ kompakt in metrisierbarem $V \Rightarrow$

- (a) $\operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F \subset \overline{\operatorname{Eco}} F$
- (b) $\operatorname{Spt} F \subset \operatorname{Spt} \overline{\operatorname{co}} F$
- (c) $\operatorname{Exp} F = \operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F$, insbesondere
- (d) $\operatorname{Exp} (\overline{\operatorname{Eco}} F) = \operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F = \operatorname{Exp} F .$

Beweis.

(a) dies ist bekanntlich eine Folge von KM 1 , da bzgl. jedes Funktionals mindestens ein Stützpunkt extrem sein muß.

(b) Sei $f \in \operatorname{Spt} F$ und $h \in \overline{\operatorname{co}} F$.

Dann gilt

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n, \quad h_n = \sum_{k=1}^m t_k g_k, \quad g_k \in F, \quad t_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m t_k = 1.$$

Da $f \in \operatorname{Spt} F$, gilt für ein $L \in V'$

$$\operatorname{Re} Lg_k \leq \operatorname{Re} Lf .$$

Für h_n folgt:

$$\operatorname{Re} Lh_n = \operatorname{Re} L \sum_{k=1}^m t_k g_k = \sum_{k=1}^m t_k \operatorname{Re} Lg_k \leq \operatorname{Re} Lf .$$

und somit schließlich

$$\operatorname{Re} Lh \leq \operatorname{Re} Lf .$$

(c) Sei f exponiert in F bzgl. $L \in V'$. Gäbe es bzgl. L einen weiteren Stützpunkt $h \in \overline{\operatorname{co}} F$ mit der Choquet-Darstellung $h = \int g \, d\mu$, so wäre $g \in \operatorname{Spt}_L(\overline{\operatorname{co}} F)$ μ -fast überall. Da der Träger von μ in $\overline{\operatorname{co}} F \subset F$ liegt, ist dies ein Widerspruch zu $f \in \operatorname{Exp}_L F$. Also haben wir: $\operatorname{Exp} F \subset \operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F$. Weiter folgt mit (a): $\operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F \subset \overline{\operatorname{co}} F \subset F$ und mit 5(c) bekommen wir schließlich $\operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F \subset \operatorname{Exp} F$. \square

A 10

F und $\overline{\operatorname{co}} F$ kompakt \Rightarrow

$$(\operatorname{Exp} F \subset \overline{\operatorname{co}} F \Rightarrow \operatorname{Exp} F = \overline{\operatorname{co}} F = \operatorname{Exp} F) .$$

Beweis.

Die Teilmengenkette

$$\operatorname{Exp} F \stackrel{9(c)}{=} \operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F \stackrel{9(a)}{\subset} \overline{\operatorname{co}} F \stackrel{4}{\subset} \operatorname{Exp} F$$

zeigt das Verlangte. \square

<u>Notationen</u>	Seite
$A := \{f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ analytisch}\}$	1
$A' := \{L \mid L \text{ lineares stetiges Funktional über } A\}$	2
$B := \{\omega \in A \mid \omega(0) = 0, \omega < 1\}$	7
$BCK := \{f \in A \mid \overline{\text{Eco}} \text{ Sub } \{f\} = [f]\}$	14
$C^* := \{f \in S^* \mid f \mathbb{D} \text{ nahezu-konvex}\}$	3
$C^*(\beta) := \{f \in A \mid f \text{ nahezu-konvex der Ordnung } \beta\}$	4
$\text{co } F := \left\{ \sum_{k=1}^n t_k f_k \mid \sum_{k=1}^n t_k = 1, t_k \in [0,1], f_k \in F, n \in \mathbb{N} \right\}$	16
$\overline{\text{co}} F := \overline{\text{co } F}$	1
$\mathbb{D} := \{z \mid z < 1\}$	1
$\mathbb{D}_r := \{z \mid z < r\}$	28
$\mathbb{D}_0 := \{f \in \mathbb{N}_0 \mid \mathbb{C} \setminus f\mathbb{D} \text{ ist die Vereinigung von Halbstrahlen}\}$	47
<i>drehungsinvariante Familie</i>	9
$EF := \{f \in F \mid f \text{ Extrempunkt von } F\}$	1
$\text{Exp } F := \{f \in F \mid f \text{ exponiert in } F\}$	2
$E_x^\alpha := [h_x^\alpha]$	13
$E^\alpha := \bigcup_{x \in \dot{X}} E_x^\alpha$	24
<i>einfache Familie</i>	14
$G^\alpha := \bigcup_{\substack{x \in X \\ \arg x < \sin \frac{\pi}{2\alpha}}} [h_x^\alpha]$	36
$h_x(z) := \frac{1+xz}{1-z}$	13
<i>Halbebenen-Radius</i>	32
$K^* := \{f \in S^* \mid f\mathbb{D} \text{ konvex}\}$	3
$KI^* := \{f \in S^* \mid f\mathbb{D} \text{ konvex in Richtung der imaginären Achse}\}$	4

$\text{Max } F := \{f \in F \mid f \text{ maximal bzgl. } \langle \cdot \rangle\}$	8
$\text{Möb } \mathbb{D} := \{f \in A \mid f \text{ Automorphismus von } \mathbb{D}\}$	39
$N := \{f \in A \mid f(0) = 0, f'(0) = 1\}$	3
$N_0 := \{f \in A \mid f(0) = 1, f(z) \neq 0\}$	3
$P := \{f \in N_0 \mid \text{Re } f > 0\}$	1
$P_x^\alpha := \text{Sub } \{h_x^\alpha\}$	13
$P_0^\alpha := \bigcup_{x \in \dot{X}} P_x^\alpha$	24
$\text{PM}(V) := \{\mu \mid \mu \text{ Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß über } V\}$	60
$S_0 := \{f \in N_0 \mid f \text{ schlicht}\}$	3
$S^* := \{f \in A \mid f \text{ schlicht}\}$	3
$S_x^\alpha := P_x^\alpha \cap S_0$	27
$S^\alpha := \bigcup_{x \in \dot{X}} S_x^\alpha$	27
$S_0(\mathbb{R}) := \{f \in S_0 \mid a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$	9
$\text{Spt}_L F := \{f \in F \mid f \text{ Stützpunkt bzgl. } L\}$	2
$\text{Spt } F := \bigcup_{L \in \mathcal{A}'} \text{Spt}_L F$	2
$\text{St}^{a^*} := \{f \in S^* \mid f \mathbb{D} \text{ sternförmig bzgl. } a\}$	3
$\text{St}^* := \bigcup_{a \in \mathbb{C}} \text{St}^{a^*}$	3
<i>starke Familie</i>	9
$\text{Sub } F := \{g \mid g < f, f \in F\}$	8
<i>subordinationsinvariante Familie</i>	8
$V^*(k) := \{f \in A \mid \text{Randdrehung von } f \mathbb{D} \leq k\pi\}$	4
$X := \{x \mid x = 1\}$	5
$\dot{X} := X \setminus \{-1\}$	13
$Y := \{y \mid y = 1\}$	5
$\varphi := \arg x \in]-\pi, \pi[$	29
$\Omega := \{f \in S_0(\mathbb{R}) \mid f(z) = \frac{(1 \pm z)^2}{(1 - yz)(1 - \bar{y}z)}, y \in Y\}$	55
$\tilde{\Omega} := \Omega \cup \left\{ f \in S_0(\mathbb{R}) \mid f(z) = 1 + \kappa \frac{z}{(1 - yz)(1 - \bar{y}z)}, \kappa \in \mathbb{R}, y \in Y \right\}$	56

$f < g$ oder f subordiniert zu $g : \Leftrightarrow \exists \omega \in B (f = g \circ \omega)$ 7
 $[f]$ oder Äquivalenzklasse von $f := \{g \mid g(z) = f(xz), x \in X\}$ 8

Für eine Familie $F^* \subset A$ schreiben wir

$F := F^* \cap N$ 4
 $F_0 := F^* \cap N_0$ 5

und für eine Familie $F \subset A$ schreiben wir

$F(\mathbb{R}) := \{f \in F \mid a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ 54
 $F(\text{sym}) := \{f \in F \mid f \mathbb{D} \text{ symmetrisch zur reellen Achse}\}$ 51

und für $F \subset N_0$

$F^\alpha := \{f^\alpha \mid f \in F\}$ 20

Literaturverzeichnis

- [1] Abu Muhanna, Y., MacGregor, T.H.: Extreme points of families of analytic functions subordinate to convex mappings. - Math. Z. 176, 1981, 511-519.
- [2] Aharonov, D., Friedland, S.: On an inequality connected with the coefficient conjecture for functions of bounded boundary rotation. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 524, 1973, 1-14.
- [3] Biernacki, M.: Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles. - Prace Math.-Fiz. 44, 1936, 293-314.
- [4] Brannan, D.A., Clunie, J.G., Kirwan, W.E.: On the coefficient problem for functions of bounded boundary rotation. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 523, 1973, 1-18.
- [5] Brickman, L.: Extreme points of the set of univalent functions. - Bull. Amer. Math. Soc. 76, 1970, 372-374.
- [6] Brickman, L., Duren, P.L.: Truncation of support points for univalent function. - Complex Variables 4, 1984, 71-83.
- [7] Brickman, L., Leung, Y.L.: Exposed points of the set of univalent functions. - Bull. London Math. Soc. 16, 1984, 157-159.
- [8] Brickman, L., Leung, Y.L., Wilken, D.R.: On extreme points and support points of the class S . - Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A, erscheint.
- [9] Brickman, L., MacGregor, T.H., Wilken, D.R.: Convex hulls of some classical families of univalent functions. - Trans. Amer. Math. Soc. 156, 1971, 91-107.
- [10] Brickman, L., Wilken, D.R.: Subordination and insuperable elements. - Mich. Math. J. 23, 1976, 225-233.

- [11] Campbell, D.: A survey of properties of the convex combination of univalent functions. - Rocky Mountain J. Math. 5, 1975, 475-492.
- [12] Clunie, J.G.: Some remarks on extreme points in function theory.- in: Aspects of contemporary complex analysis, Proceedings Durham 1979, edited by D.A. Brannan and J.G. Clunie, Academic Press, 1980.
- [13] Duren, P.L.: Univalent functions. - Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1983.
- [14] Duren, P.L., Schober, G.: Nonvanishing univalent functions. - Math. Z. 170, 1980, 195-216.
- [15] Duren, P.L., Schober, G.: Nonvanishing univalent functions II. - Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A, erscheint.
- [16] Friedland, S., Schiffer, M.: On coefficient regions of univalent functions. - J. Analyse Math. 31, 1977, 125-168.
- [17] Grassmann, E., Hengartner, W., Schober, G.: Support points of the class of close-to-convex functions. - Can. Math. Bull. 19, 1976, 177-179.
- [18] Hallenbeck, D.J., MacGregor, T.H.: Subordination and extreme-point theory. - Pac. J. Math. 50, 1974, 455-468.
- [19] Hallenbeck, D.J., MacGregor, T.H.: Support points of families of analytic functions described by subordination. - Trans. Amer. Math. Soc. 278, 1983, 523-546.
- [20] Hamilton, D.H.: Covering theorems for univalent functions, erscheint.

Zusammenfassung

Familien analytischer, insbesondere schlichter Funktionen im Einheitskreis, deren Elemente f der Normierung $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ genügen, sind im letzten Jahrzehnt auf Extrempunkte und Stützpunkte hin untersucht worden.

In dieser Arbeit werden Familien untersucht, deren Elemente der Normierung $f(0) = 1$ und $f(z) \neq 0$ genügen.

Es werden die Extrem- und Stützpunkt mengen von Klassen konvexer, sternförmiger, nahezu-konvexer und anderer durch geometrische Eigenschaften der Bildgebiete ausgezeichnete Funktionen charakterisiert, und es werden konkrete Extremalprobleme gelöst.

Lebenslauf

Name: Wolfram Koepf

Geburtsdatum: 16.7.1953

Geburtsort: Stuttgart

Staatsangehörigkeit: deutsch

Schulausbildung:

1960 - 1964 Besuch der Friedens-Grundschule
in Stuttgart

1964 - 1972 Besuch des Karls-Gymnasiums
in Stuttgart mit Abschluß der
Reifeprüfung am 21.6.72

Studium:

WS 72/73 - SS 74 Studium an der Universität
Stuttgart in den Fächern
Mathematik und Physik

seit WS 74/75 Fortsetzung des begonnenen
Studiums an der Freien
Universität Berlin

WS 77/78 - SS 80 Tätigkeit als studentischer
Tutor am Fachbereich 19 der FU

WS 80/81 Abschluß des Studiums
mit der Diplom-Prüfung
am 27.3.1981

seit WS 81/82 wiss. Mitarbeiter am I. Institut
des Fachbereichs 19

- [21] Hengartner, W., Pfluger, A., Schober, G.: On support points in the class of functions with bounded boundary rotation. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 6, 1981, 213-224.
- [22] Herglotz, G.: Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis. - Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, 1911, 501-511.
- [23] Hornblower, R., Wilken, D.R.: On the support points of close-to-convex functions, erscheint.
- [24] Kaplan, W.: Close-to convex schlicht functions. - Mich. Math. J. 1, 1952, 169-185.
- [25] Kirwan, W., Schober, G.: New inequalities from old ones. - Math. Z. 180, 1982, 19-40.
- [26] Koepf, W.: Close-to-convex functions and linear-invariant families. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 8, 1983, erscheint.
- [27] Lewandowski, Z.: Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes I. - Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 12, 1958, 131-146.
- [28] Lewandowski, Z.: Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes II. - Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 14, 1960, 19-46.
- [29] MacGregor, T.H.: Applications of extreme-point theory to univalent functions. - Mich. Math. J. 19, 1972, 361-376.
- [30] Milcetic, J.G.: On the extreme points of some sets of analytic functions. - Proc. Amer. Math. Soc. 45, 1974, 223-228.

- [31] Paatero, V.: Über die konforme Abbildung von Gebieten deren Ränder von beschränkter Drehung sind. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 33: 9, 1931, 1-78.
- [32] Pearce, K.: New support points of S and extreme points of HS . - Proc. Amer. Math. Soc. 81, 1981, 425-428.
- [33] Pfluger, A.: Lineare Extremalprobleme bei schlichten Funktionen. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 489, 1971, 1-31.
- [34] Phelps, R.R.: Lectures on Choquet's theorem. - Van Nostrand Math. Studies #7, Princeton - New Jersey, 1966.
- [35] Pommerenke, Ch.: Univalent functions. - Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen und Zürich, 1975.
- [36] Pommerenke, Ch.: On close-to-convex analytic functions. - Trans. Amer. Math. Soc. 114, 1965, 176-186.
- [37] Reade, M.O.: The coefficients of close-to-convex functions. - Duke Math. J. 23, 1956, 459-462.
- [38] Robertson, M.S.: On the theory of univalent functions. - Ann. of Math. (2) 37, 1936, 374-408.
- [39] Schaeffer, A.C., Spencer, D.C.: Coefficient regions for schlicht functions. - Amer. Math. Soc. Colloquium Publications Vol. 35, New York, 1950.
- [40] Schober, G.: Univalent functions - selected topics. - Springer Lecture Notes 478, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.