Von der Bieberbachschen Vermutung zum Satz von de Branges sowie der Beweisvariante von Weinstein

Wolfram Koepf

Der Ursprung der Bieberbachschen Vermutung liegt in der Mitte des letzten Jahrhunderts, als der *Riemannsche Abbildungssatz* (RAS) formuliert wurde.

1851	RIEMANN	Abbildungssatz

Dieser besagt, daß es für jedes einfach-zusammenhängende Gebiet $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ der erweiterten komplexen Ebene mit mindestens zwei Randpunkten eine schlichte, d. h. meromorphe und bijektive, Abbildung von G auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ gibt. Wegen der Bijektivität kann man genausogut die Umkehrabbildungen betrachten, die alle $\mathbb{D}$ als Definitionsbereich haben. Da für schlichte Funktionen die Ableitung nicht verschwindet, ist es keine Einschränkung, folgende Normierung vorzunehmen:

$$S := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid \ f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \text{ analytisch und injektiv} \right\} .$$

Häufig wird auch ($\Delta := \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \;\middle|\; |z| > 1 \right\}$)

$$\Sigma := \left\{ g : \Delta \to \widehat{\mathbb{C}} \;\middle|\; g(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots \text{ meromorph und injektiv} \right\}$$

betrachtet.

Es stellte sich heraus, daß Riemanns Beweis des RAS eine Lücke enthielt. Anfang dieses Jahrhunderts wurde durch Kompaktheitsargumente ein vollständiger Beweis erbracht ([Car3], [Koe3]).

1912	CARATHÉODORY KOEBE	Beweis des Abbildungssatzes

Zuvor hatte Koebe die Kompaktheit von S und Σ bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz bewiesen ([Koe1], [Koe2]).

1909	KOEBE	Kompaktheit von S

Diese impliziert, daß stetige reelle Funktionale die Menge S auf ein kompaktes reelles Intervall abbilden, was u. a. bedeutet, daß für das Koeffizientenfunktional $k_n := \max_{f \in S} |a_n(f)|$ existiert.

Bald darauf erzielte Gronwall ein erstes Ergebnis bezüglich des Koeffizientenproblems [Gro].

1914	GRONWALL	Flächensatz in Σ

Der *Flächensatz* ist eine Ungleichung, die analytischer Ausdruck für die offensichtliche Tatsache ist, daß der Flächeninhalt des Komplements des Bildes von Δ einer Funktion $g(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots \in \Sigma$ nichtnegativ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2 \leq 1 \ . \tag{0.1}$$

Ohne die Gronwallsche Arbeit zu kennen, hat Bieberbach diese Beziehung ebenfalls bewiesen, und daraus das erste Koeffizientenresultat in S hergeleitet [Bie].

1916	BIEBERBACH	$\|a_2\| \leq 2$

Dies erhält man aus der Beziehung $|b_1| \leq 1$, welche eine Konsequenz von (0.1) ist, durch eine einfache Übertragung nach S. Da $|b_1| = 1$ wegen (0.1) die Gleichungskette $b_2 = b_3 = \cdots = 0$ nach sich zieht, ist $a_2 = 2$ genau für die *Koebefunktion k*

$$k(z) := \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \ ,$$

deren Bildgebiet eine radial aufgeschlitzte Ebene ist. Bieberbach schreibt in einer Fußnote

„Vielleicht ist überhaupt $k_n = n$.“

Diese Aussage wird als die *Bieberbachsche Vermutung* (BV) bezeichnet.

1916	VERMUTUNG:	$\|a_n\| \leq n$

Die Methoden, die man damals zur Verfügung hatte, schienen keine Möglichkeit zu bieten, dieses Problem zu bewältigen. So versuchte man zunächst, Teillösungen zu finden, und zwar

1. die BV unter zusätzlichen geometrischen Voraussetzungen an das Bildgebiet bzw.
2. das Problem speziell für $n = 3$ oder $n = 4$ zu lösen.

Der erste Fortschritt in einer dieser Fragestellungen gelang Löwner [Lö1].

1917	LÖWNER	$\|a_n\| \le 1$ (konvexe Funktionen)

Dabei wird eine schlichte Funktion konvex genannt, wenn ihr Bildgebiet konvex ist. Betrachtet man nun polygonal berandete Gebiete mit Ecken $w_k \in \mathbb{C}$ und Innenwinkeln $\alpha_k \pi \quad (k = 1, \ldots, n)$, so folgt aus dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip die *Schwarz-Christoffel Formel* für die Abbildungsfunktion f

$$1 + z\frac{f''}{f'}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\alpha_k}{2} \cdot \frac{1 + \overline{f^{-1}(w_k)}z}{1 - \overline{f^{-1}(w_k)}z} \; ,$$

die zwar eine Funktional-Differentialgleichung darstellt, welche gewöhnlich nicht explizit gelöst werden kann, aber wegen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\alpha_k}{2} = 1$$

(Drehung des Randes bei einem Umlauf ist 2π) und

$$\left| f^{-1}(w_k) \right| = 1 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

(Urbilder der Ecken liegen auf $\partial\mathbb{D}$) folgt, daß

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''}{f'}(z)\right) > 0 \qquad (z \in \mathbb{D}) \; , \tag{0.2}$$

falls $\alpha_k < 1$ für alle $k = 1, \ldots, n$ ist, welches genau dem konvexen Fall entspricht. Man kann übrigens auch ohne Schwierigkeiten zeigen, daß aus (0.2) die Schlichtheit und Konvexität von f folgt (s. z. B. [Stu]).

Eine elementare Abschätzung der Koeffizienten von Funktionen mit positivem Realteil, die auf Carathéodory (1907) zurückgeht ([Car1], [Car2])

$$\operatorname{Re}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n\right) > 0 \quad \Longrightarrow \quad |p_n| \le 2 \;\; (n \in \mathbb{N}) \; , \tag{0.3}$$

erlaubt dann einen Induktionsbeweis der Ungleichungen $a_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ für konvexe Funktionen. Dieses Ergebnis ist analytischer Ausdruck dafür, daß konvexe Gebiete weit davon entfernt sind, extremal bezüglich der Gesamtheit aller einfach-zusammenhängenden Gebiete zu sein.

Den nächsten Fortschritt erzielte R. Nevanlinna [Nev].

1920	NEVANLINNA	$\lvert a_n\rvert \leq n$ (sternförmige Funktionen)

Er betrachtete schlichte Funktionen, die ein Bildgebiet besitzen, das sternförmig bezüglich des Ursprungs ist. Der Beweis der BV für sternförmige Funktionen gelingt ebenfalls mit einer analytischen Darstellung. Zuerst wird mit dem Schwarzschen Lemma bewiesen, daß die Sternförmigkeit von $f(\mathbb{D})$ die Sternförmigkeit von $f(\mathbb{D}_r)$ ($\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$) für alle $r \in (0,1)$ nach sich zieht. Dann folgt hieraus, daß $|\arg z f'(z) - \arg f(z)| < \frac{\pi}{2}$, also

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f'}{f}(z)\right) > 0 \qquad (z \in \mathbb{D}) \tag{0.4}$$

ist. Carathéodorys Abschätzung (0.3) für Funktionen mit positivem Realteil liefert dann das Resultat. Wieder läßt sich auch zeigen, daß aus (0.4) die Schlichtheit und Sternförmigkeit von f folgt.

Damit war nun klar, daß die BV eine gewisse Chance hatte, wahr zu sein, da sie immerhin für eine beträchtliche Menge von schlichten Funktionen galt. Aber noch immer war es nicht gelungen, die BV auch nur für ein einziges $n > 2$ in ganz S zu zeigen. Dies gelang wieder Löwner [Lö2].

Löwners Arbeit war wohl die wichtigste Vorarbeit zum Beweis der BV, zumindest aber der erste entscheidende Schritt.

1923	LÖWNER	$\lvert a_3\rvert \leq 3$ (Löwner-Theorie)

Löwner gab eine analytische Darstellung für eine Teilmenge von Funktionen aus S, die bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz dicht in S liegt. Der Satz von Löwner besagt, daß es zu jedem f aus dieser dichten Teilmenge von S eine *Löwnerkette* gibt, d. h. eine Funktionenfamilie $\{f(z,t) \mid t \geq 0\}$ mit

$$f(z,t) = e^t z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n, \quad (z \in \mathbb{D}, t \geq 0, a_n(t) \in \mathbb{C}\ (n \geq 2)) ,$$

deren Anfangsterm f ist

$$f(z,0) = f(z) ,$$

und die der Beziehung

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\dot{f}(z,t)}{zf'(z,t)}\right) > 0 \qquad (z \in \mathbb{D}) \tag{0.5}$$

genügt, wobei wie gewöhnlich die partiellen Ableitungen nach z bzw. t mit $'$ bzw. $\dot{}$ bezeichnet werden. Diese Beziehung besagt geometrisch, daß die Bildgebiete $f(\mathbb{D}_r, t)$ mit wachsendem t wachsen, welches eine Folge des Schwarzschen Lemmas ist. Löwner betrachtet also die Dynamik schlichter Funktionen. Die von ihm untersuchte dichte Teilmenge von S besteht aus denjenigen Funktionen, deren Bildgebiet aus ganz $\mathbb{C}$ bis auf einen Jordanbogen besteht. Die Löwnerkette besteht dann aus den Funktionen mit verkürztem Schlitz als Bild.

Die Löwnersche Differentialgleichung (0.5) ist ein Charakteristikum schlichter Funktionen, denn es gibt für alle $f \in S$ eine Löwnerkette. Weiter kann man zeigen, daß unter sehr allgemeinen Voraussetzungen an die Funktion

$$p(z,t) := \left(\frac{\dot{f}(z,t)}{zf'(z,t)}\right) \tag{0.6}$$

aus der Schlichtheit von $f(z,0)$ die von $f(z,t)$ $(t > 0)$ folgt.

Sehr leicht folgt nun aus (0.5), daß $|a_3| \leq 3$ in S gilt (s. z. B. [Dur2], § 3.5). Aber erst 1973 ist es Nehari [Neh2] gelungen, für die Aussage $|a_4| \leq 4$ einen Beweis zu finden, der ausschließlich auf der Löwnertheorie basiert.

Dann gelang es Littlewood zu zeigen, daß die Größenordnung der Aussage der BV die richtige ist [Lit].

1925	LITTLEWOOD	$\|a_n\| < e \cdot n$

Ist $f \in S$, so ist die Funktion h mit $\frac{h(z)}{z} := \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ – sie heißt die Quadratwurzeltransformierte von f – eine ungerade schlichte Funktion und umgekehrt. Aus dem Koebeschen Verzerrungssatz $|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$, der von Bieberbach [Bie] bewiesen wurde, folgt $|h(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|^2}$ und somit

$$\text{area }(h(\mathbb{D}_r)) \leq \pi \frac{r^2}{(1-r^2)^2} .$$

Hieraus kann man mit der Parsevalschen Gleichung folgern, daß

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r^2e^{i\theta})\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r^2e^{2i\theta})\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|h(re^{i\theta})\right|^2 d\theta \leq \frac{r^2}{1-r^2} .$$

Weiter hat man dann mit der Cauchyschen Integralformel

$$|a_n| \le \frac{1}{r^n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta\right) \le \frac{1}{r^{n-1}(1-r)} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot n\ ,$$

indem man $r := 1 - \frac{1}{n}$ einsetzt. Da $(1+\frac{1}{n})^n$ monoton wachsend gegen e strebt, folgt Littlewoods Resultat.

Es ist ein Nachteil dieser Verfahrensweise, daß durch die Integralmittelwertbildung soviel Information verschenkt wird, daß ein scharfes Resultat damit nicht zu erzielen ist.

Ein knappes Jahrzehnt nach der Formulierung der BV war sie also

1. für eine interessante Teilmenge,
2. für den dritten Koeffizienten sowie
3. von der Größenordnung her

bestätigt.

Als nächstes konnte die BV wieder für eine weitere Teilmenge von S bewiesen werden, nämlich für die schlichten Funktionen mit reellen Taylorkoeffizienten, die auch durch Bildgebiete charakterisiert werden, welche symmetrisch zur reellen Achse sind ([Die], [Rog]).

1931	DIEUDONNÉ ROGOSINSKI	$\lvert a_n\rvert \le n$ (reelle Koeffizienten)

Die beiden Autoren arbeiteten mit verschiedenen Lösungsmethoden, die Fragestellung schien in der Luft zu liegen.

Wieder mit der Integralmittelwertmethode gelang es Littlewood und Paley [LP] zu zeigen, daß für ungerade schlichte Funktionen $h(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S_u$

$$|c_n| \le A$$

für eine Konstante A gilt, welche weder von h noch von n abhängt. Ihre Arbeit enthielt die Fußnote

“No doubt the true bound is given by $A = 1$.”

Sie vermuteten also, daß die Quadratwurzeltransformierte der Koebefunktion $\frac{z}{1-z^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}$ eine Extremalfunktion für dieses Problems sei.

1932	LITTLEWOOD PALEY	L.-P. Vermutung (ungerade Funktionen)

Die Littlewood-Paley Vermutung (LPV) wurde unverzüglich von Fekete und Szegö [FS] mit der Löwnermethode widerlegt. Dies war ein erster Rückschlag in der Geschichte der BV.

1933	FEKETE SZÉGÖ	$\max\limits_{h \in S_u} \lvert c_5 \rvert = \frac{1}{2} + e^{-2/3} = 1.0134... > 1$

Aus der LPV wäre die BV gefolgt. Ist nämlich $h(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ die Quadratwurzeltransformierte von $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, so gilt

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} c_{2(n-k)+1} \cdot c_{2k-1} \; , \tag{0.7}$$

so daß offenbar aus $|c_n| \leq 1 \;\; (n \in \mathbb{N})$ die BV folgt.

Wenn auch die LPV falsch ist, so zeigte sie doch den Weg in eine richtige Richtung. Robertson [Rob] vermutete, daß eine etwas schwächere Aussage wahr sein könnte, die aber immer noch die BV nach sich zieht.

1936	ROBERTSON	R.-Vermutung

Die *Robertson-Vermutung* (RV) ist, daß für ungerade schlichte Funktionen gilt

$$h \in S_u \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |c_{2k-1}|^2 \leq n \; ,$$

woraus mit (0.7) die BV durch eine Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt. Robertson zeigte die RV für $n = 3$.

Diese Arbeit von Robertson sollte sich als zweiter entscheidender Schritt zum Beweis der BV herausstellen. Wesentlich war, daß Robertson gewichtete quadratische Mittelwerte von Taylorkoeffizienten betrachtete.

Ende der dreißiger Jahre wurde von Schiffer [Schi] eine Variationsmethode entwickelt, die zur Lösung von Extremalproblemen in S geeignet ist. Während sonst in der Variationsrechnung eines der Hauptprobleme der Nachweis der Existenz einer Lösung ist, ist diese in S aufgrund der Kompaktheit gesichert, dafür ist es aber hier entsprechend schwierig, geeignete Vergleichsfunktionen zu konstruieren, da S alles andere als ein linearer Raum ist.

1937	SCHIFFER	Randvariation

Die Idee von Schiffers *Randvariation* ist, eine schlichte Funktion f mit einer Familie von auf $f(\mathbb{D})$ schlichten Fast-Identitäten zu komponieren, und man erhält eine Differentialgleichung, die die Extremalfunktionen charakterisiert. Ist L ein stetiges, lineares Funktional, und ist $\operatorname{Re} L(f_0) = \max_{f \in S} \operatorname{Re} L(f)$, dann ist als eine – allerdings ziemlich komplizierte – Folge der Variationsmethode von Schiffer $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, wobei Γ ein analytischer Bogen ist, welcher der Differential-Funktionalgleichung

$$\frac{1}{\Gamma(t)^2} L\left(\frac{f^2}{f - \Gamma(t)}\right) d\Gamma(t)^2 > 0$$

genügt, d. h. eine Trajektorie eines quadratischen Differentials. Eine Anwendung des Schwarzschen Spiegelungsprinzips ergibt beim Koeffizientenfunktional $L = \operatorname{Re} a_n(f)$ für die Abbildungsfunktion f selbst die *Schiffersche Differentialgleichung*

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2 P_n\left(\frac{1}{f(z)}\right) = R_n(z),$$

wobei P_n das Polynom vom Grad $n-1$ mit der erzeugenden Funktion

$$\frac{\zeta\,(f(z))^2}{1 - \zeta f(z)} = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\zeta) z^k$$

und R_n die rationale Funktion

$$R_n(z) = (n-1)a_n + \sum_{k=1}^{n-1} (k a_k z^{k-n} + k\overline{a_k} z^{n-k})$$

ist.

Jede Lösung f des Bieberbachschen Koeffizientenproblems muß also die Schiffersche Differentialgleichung erfüllen. Insbesondere ist $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ und Γ ist ein analytischer Bogen. Die Koebefunktion ist für jedes $n \geq 2$ eine Lösung der Schifferschen Differentialgleichung, aber sie ist nicht die einzige.

Es sollte bis zum Jahre 1955 dauern, ehe Garabedian und Schiffer [GS] unter Zuhilfenahme der Variationsmethode die BV zum ersten Mal für $n = 4$ beweisen konnten.

Im Gegensatz zu Schiffers Variationsmethode sind die Grunskyschen Ungleichungen [Gru] von ganz elementarer Natur. Sie stellen eine Verallgemeinerung des Flächensatzes von Gronwall dar.

1939	GRUNSKY	G. Ungleichungen

Für alle $g \in \Sigma$ sei

$$\ln \frac{g(z) - g(\zeta)}{z - \zeta} =: \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} z^{-n} \zeta^{-k} \qquad (z, \zeta \in \Delta) \ . \tag{0.8}$$

Die *Grunskykoeffizienten* γ_{nk} sind Polynome in den Koeffizienten b_n von g. Man beachte, daß eine Darstellung der Form (0.8) für eine meromorphe Funktion $g(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots$ genau dann existiert, wenn $g \in \Sigma$ ist.

Die *Grunskyschen Ungleichungen*

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \gamma_{nk} \lambda_n \mu_k \right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{n} \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{|\mu_k|^2}{k}$$

gelten für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\lambda_n, \mu_n \in \mathbb{C}$ $(n = 1, \ldots, N)$.

Sie wurden 1960 überraschend von Charzyński und Schiffer [CS] zu einem absolut elementaren und einfachen Beweis der BV für $n = 4$ benutzt. Acht Jahre später zeigten Pederson [Ped] und unabhängig davon Ozawa ([Oza1], [Oza2]) mit der Grunsky-Methode auch $|a_6| \leq 6$ für $f \in S$.

Ebenfalls gelang es Friedland [Frie] 1970, die RV für $n = 4$ zu beweisen.

Nach Beendigung der dreißiger Jahre war das Interesse an der BV etwas abgeebbt. Zu erfolglos war man auf der Suche nach einem Beweis geblieben. Erst Mitte der fünfziger Jahre wurde die Sache wieder aufgegriffen.

Hayman wurde von Littlewood die BV als Dissertationsthema ans Herz gelegt. Nachdem ein vollständiger Beweis nicht in Aussicht stand, stellte sich Hayman die immer noch schwierige Frage nach dem Verhalten von $\frac{|a_n|}{n}$ für $n \to \infty$, und er konnte sie lösen [Hay].

1955	HAYMAN	Regularitätssatz

Er zeigte zunächst elementar, daß für $f \in S$

$$\lim_{r \to 1} (1 - r^2) \max_{|z|=r} |f(z)| = \alpha \leq 1 \ .$$

Die Zahl α wird der *Hayman-Index* von f genannt. Hayman konnte nun zeigen, daß für jede Funktion $f \in S$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_n(f)|}{n} = \alpha \tag{0.9}$$

ist. Dies ist einerseits sehr viel Information, da es vielleicht sogar überrascht, daß dieser Grenzwert überhaupt für jedes $f \in S$ existiert. Andererseits beweist dies nicht die BV für große $n \in \mathbb{N}$, da die Konvergenzgeschwindigkeit erheblich von f

abhängt. Wenn es auch so aussieht, daß Haymans Resultat starke Evidenz für die BV mit sich bringt, so ist dies doch ein Trugschluß, da aus dem Regularitätssatz auch für ungerade schlichte Funktionen $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S_u$ mit $\frac{h(z)}{z} = \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} |c_{2n+1}| = \sqrt{\alpha} \leq 1$$

folgt, aber die LPV ist ja bekanntlich falsch!

Auch konnte die BV für eine weitere Teilmenge von S, die nahezu-konvexen Funktionen, bewiesen werden [Rea].

1955	READE	$\|a_n\| \leq n$ (nahezu-konvexe Funktionen)

Dabei heißt eine Funktion f nahezu-konvex, wenn das Komplement von $f(\mathbb{D})$ aus der Vereinigung von paarweise disjunkten Strahlen besteht. Offenbar haben sternförmige Funktionen diese Eigenschaft, so daß dies Nevanlinnas Resultat verallgemeinert.

Erinnern wir uns, daß ebenfalls 1955 die BV zum ersten Mal für $n = 4$ bewiesen wurde.

1955	GARABEDIAN SCHIFFER	$\|a_4\| \leq 4$ (Löwnerth., Schiffervar. etc.)

Mit den Grunskyschen Ungleichungen gelang ein ganz elementarer Beweis derselben Aussage [CS].

1960	CHARZYŃSKI SCHIFFER	$\|a_4\| \leq 4$ (Grunsky Ungleichungen)

Dann gelang es Milin ([Mil1], [Mil3]) durch geschickte Wahl der freien Parameter bei den Grunskyschen Ungleichungen, das Resultat von Littlewood erheblich zu verbessern.

1965	MILIN	$\|a_n\| < 1.243 \cdot n$

Außerdem ist in der ehemaligen Sowjetunion in den sechziger Jahren am letzten entscheidenden Schritt vor dem Beweis der BV gearbeitet worden. Es hatte sich in der Geschichte der BV gezeigt, daß es leichter schien, Informationen über den Logarithmus einer schlichten Funktion zu erhalten, z. B. über die Grunsky-Koeffizienten, als über die Funktion selbst. Lebedev und I. M. Milin ([LM],

[Mil2], [Mil3]) stellten sich die Frage, wie diese Informationen in solche für die Koeffizienten von f selbst umgewandelt werden könnten. Dabei bemerkten sie, daß es wesentlich leichter war, Informationen über gewichtete quadratische Mittel von Taylorkoeffizienten zu übertragen. Dies ließ sich gut mit der RV kombinieren. Sie zeigten elementar – beinahe ausschließlich unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung: Hat $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$ mit $\beta_0 = 1$ positiven Konvergenzradius, dann gilt dies auch für $\varphi(z) := \ln \psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$, und es bestehen folgende Beziehungen zwischen den Koeffizienten

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2\right) , \tag{0.10}$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2 \leq \exp\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right) \tag{0.11}$$

sowie

$$|\beta_n|^2 \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right) . \tag{0.12}$$

Man beachte, daß die *Lebedev-Milinschen Ungleichungen* (0.10)–(0.12) überhaupt nichts mit schlichten Funktionen zu tun haben. Daher war es auch möglich, sie auf vollkommen andere Probleme der Funktionentheorie mit großem Erfolg anzuwenden (s. z. B. [Aha], [Neh1], [Leu1], [Leu2]).

1967	LEBEDEV MILIN	L.-M. Ungleichungen

Die Natur der Lebedev-Milinschen Ungleichungen sorgt dafür, daß sie sich auf die BV anwenden lassen. Dafür ist nötig, daß sie in geeigneter Weise für die Koebefunktion scharf sind. Setzen wir

$$\psi(z) := \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n ,$$

so ist

$$\varphi(z) = \ln \frac{f(z)}{z} =: \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n .$$

Ist nun $f \in S$, so nennen wir d_n ($n \in \mathbb{N}$) die *logarithmischen Koeffizienten* von f. Sei ferner $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ die Quadratwurzeltransformierte von f. Gilt nun schließlich für ein $n \in \mathbb{N}$ die *Milinsche Vermutung* (MV)

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(k|d_k|^2 - \frac{4}{k}\right) \le 0 \,, \tag{0.13}$$

so folgt wegen der Beziehung $\ln \frac{h(z)}{z} = \frac{1}{2}\varphi(z^2)$ aus der 2. Lebedev-Milinschen Ungleichung (0.11), daß

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}|c_{2k-1}|^2 \le 1 \,,$$

also die RV und folglich die BV für den Index $n+1$.

1971	MILIN	M. Vermutung

Man beachte, daß die MV eine Aussage über ein gewichtetes quadratisches Mittel der logarithmischen Koeffizienten bzw. der Koeffizienten von

$$z\frac{f'}{f}(z) = 1 + z\left(\ln \frac{f(z)}{z}\right)'(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n z^n \,,$$

gibt, deren Betrag für sternförmige Funktionen wegen (0.4) und (0.3) jeweils durch 2 beschränkt ist, so daß für diese Funktionen $|d_k| \le 2/k$ ($k \in \mathbb{N}$) gilt und folglich die MV wahr ist.

Ende der sechziger Jahre war es gelungen, mit den Grunskyschen Ungleichungen weitere Erfolge zu erzielen ([Ped], [Oza1], [Oza2], [Frie]).

1968	PEDERSON OZAWA	$\vert a_6\vert \le 6$ (Grunsky Ungleichungen)

1970	FRIEDLAND	RV für $n = 4$ (Grunsky Ungleichungen)

Eine Strategie, die seit der Arbeit von Schiffer verfolgt wurde, war die Charakterisierung der Menge der *Stützpunkte* von S, d. h. derjenigen Funktionen, die irgendein lineares Extremalproblem lösen. Man wußte aus der Schifferschen Theorie, daß dann $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ ist mit einer analytischen Kurve Γ. War es möglich, die Stützpunkte genauer zu charakterisieren, vielleicht sogar zu parametrisieren?

An einer ähnlichen Fragestellung arbeitete Brickman [Bri], der untersuchte, welche Eigenschaften *Extrempunkte* von S haben, d. h. Funktionen, die keine echte konvexe Darstellung innerhalb S besitzen.

1970	BRICKMAN	Extrempunkte

Er fand einen einfachen Beweis dafür, daß für Extrempunkte $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ ist mit einer Kurve Γ, deren Betrag monoton wächst.

Zu der damaligen Zeit setzte man große Hoffnungen in diese funktionalanalytischen Überlegungen. Es sollte sich herausstellen – ironischerweise zeitgleich mit dem Beweis der MV durch de Branges – daß es zu viele Extrem- und Stützpunkte in S gibt, als daß sie für die vorliegenden Fragestellungen von Nutzen sein könnten [Ham]. Allerdings konnten mit der Extrempunktmethode bestechende Aussagen über geometrisch erklärte Teilmengen wie konvexe und sternförmige Funktionen gewonnen werden ([BMW], s. auch [Koe4] und [Koe5]).

Eine andere Art der Exponentiation der Grunskyschen Ungleichungen als die von Lebedev und Milin wurde von FitzGerald [Fitz] entwickelt. Damit gelang es ihm, Milins Abschätzung zu verbessern.

1972	FitzGERALD	$\lvert a_n\rvert < \sqrt{\frac{7}{6}} \cdot n = 1.0801... \cdot n$

Horowitz [Hor] konnte 1978 durch eine Verfeinerung von FitzGeralds Argumentation dieses Ergebnis zu der Ungleichung

$$|a_n| < 1.0657 \cdot n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{0.14}$$

weiterentwickeln.

Im Jahr von FitzGeralds Resultat gelang es, ein weiteres Einzelergebnis hinzuzufügen [PS].

1972	PEDERSON SCHIFFER	$\lvert a_5\rvert \leq 5$

Nun war also die BV für $n \leq 6$, für nahezu-konvexe Funktionen und Funktionen mit reellen Koeffizienten bewiesen, und man hatte das Haymansche Regularitätsresultat (0.9) sowie die Abschätzung (0.14). Aber noch immer gab es keine Idee, die scharfe Abschätzung, welche die BV darstellt, zu erhalten. War am Ende die BV falsch? Die Widerlegung der LPV durch Fekete und Szegö sowie auch die Ergebnisse anderer Extremalprobleme – z. B. ist

$$\max \left\{ |c_7| \;\middle|\; h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S_u,\ c_n \in \mathbb{R}\ (n \in \mathbb{N}) \right\} = 1 + \frac{7}{1083}$$

nur sehr wenig größer als 1 [Lee] – deuten die Möglichkeit an, daß die BV für ein $n \in \mathbb{N}$ knapp falsch sein könnte.

Einige Forscher versuchten nun, ein numerisches Gegenbeispiel zu finden, und Hummel berichtete, er sei Anfang der achtziger Jahre sicher gewesen, daß die BV ungefähr bei $n = 19$ einbrechen würde. Hummel war es 1976 gelungen, eine Vermutung über die sogenannten Gelferfunktionen auf diese Art zu widerlegen [Hum].

Hayman und Hummel fanden mit numerischen Methoden im Rahmen der Arbeit [HH] Beispiele schlichter Funktionen, deren Koeffizienten im Widerspruch zur BV standen. Im Rahmen der Fehlertoleranz der numerischen Berechnungen konnte allerdings hiermit die BV nicht widerlegt werden. Mehr und mehr aber schien die Evidenz *gegen* die BV zu sprechen.

Im Frühjahr 1984 sandte de Branges ein Buchmanuskript an namhafte Spezialisten im Bereich der schlichten Funktionen, dessen letztes Kapitel einen Beweis der MV enthielt. Aber der Beweis schien Fehler zu enthalten, und kaum einer der Angeschriebenen wird das 385seitige Manuskript vollständig durchgearbeitet haben. De Branges trug seine Ergebnisse im Funktionentheorie-Seminar am Steklov-Institut in Leningrad, dem auch Milin angehört, vor, und im Juni 1984 war den dortigen Seminarteilnehmern klargeworden, daß de Branges' Beweis stimmte! Emel'yanov hatte die wesentlichen Ideen von de Branges ins Russische übertragen, und Milin arbeitete den funktionentheoretischen Kern der Argumentation heraus und versandte diese Version, die weltweit Verbreitung fand [Mil4].

1984	de BRANGES	Beweis der MV $\Rightarrow$ RV $\Rightarrow$ BV

Die Ausgangsidee von de Branges war: Sowohl die RV als auch die MV waren Aussagen über gewichtete quadratische Mittelwerte der Koeffizienten gewisser analytischer Funktionen. Sie konnten aufgefaßt werden als Aussagen über die Norm in gewissen Hilberträumen analytischer Funktionen. Von diesem funktionalanalytischen Gedanken war de Branges geleitet, als ihm folgende Überlegungen gelangen. Um die MV (0.13) zu zeigen, setze man

$$\psi(t) := \sum_{k=1}^{n} \tau_k(t) \left(k|d_k(t)|^2 - \frac{4}{k} \right) \ ,$$

wobei das Funktionensystem $(\tau_k)_{k=1,\cdots,n+1}$ von Funktionen $\tau_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ noch festzusetzen sein wird und $d_k(t)$ die logarithmischen Koeffizienten von $e^{-t} f(z,t)$ einer Löwnerkette $f(z,t)$ von f seien.

Der Milinschen Vermutung entspricht dann die Beziehung

$$\psi(0) \le 0 \ ,$$

wenn man

$$\tau_k(0) = n + 1 - k \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{0.15}$$

setzt. De Branges gelang es nun zu zeigen, daß die MV zum Index $n \geq 2$ stimmte, wenn das Funktionensystem $(\tau_k)_{k=1,\cdots,n+1}$ die Eigenschaften

$$\begin{gathered} \tau_k(t) - \tau_{k+1}(t) = -\frac{\dot{\tau}_k(t)}{k} - \frac{\dot{\tau}_{k+1}(t)}{k+1} \qquad (k = 1, \ldots, n) \\ \tau_{n+1} = 0 \ , \end{gathered} \tag{0.16}$$

$$\lim_{t \to \infty} \tau_k(t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{0.17}$$

und

$$\dot{\tau}_k(t) < 0 \qquad (t \in \mathbb{R}^+) \tag{0.18}$$

hat, da dann mit der Löwnerschen Differentialgleichung (0.5) nach längerer Rechnung $\dot{\psi}(t) \geq 0$ und damit $\psi(0) = -\int\limits_0^\infty \dot{\psi}(t)dt \leq 0$ folgt.

Somit reduzierte sich die BV für den Index $n+1$ auf die Existenz der Funktionen $(\tau_k)_{k=1,\cdots,n+1}$ mit den Eigenschaften (0.15)–(0.18).

Nun hat das Differentialgleichungssystem (0.16) mit den Anfangsbedingungen (0.15) bereits eine eindeutige Lösung, so daß Eigenschaften (0.17) und (0.18) zusätzlich erfüllt sein müssen! Hier hatte de Branges das Glück des Tüchtigen. Während (0.17) mit der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen gefolgert werden kann, brauchte man für den Nachweis von (0.18) eine explizite Darstellung der Lösung, die de Branges angab. Er verifizierte (0.18) von Hand bis $n = 5$ (d. h. die BV immerhin wiederum bis $n = 6$!). Dann ließ er (0.18) numerisch bis $n = 30$ überprüfen, während dessen es sich herausstellte, daß (0.18) ein von Askey und Gasper [AG] 1976 bewiesener Satz war! Dies vervollständigte den Beweis der MV [deBr].

FitzGerald und Pommerenke [FP] erkannten, daß der Beweis von de Branges im Grunde von der Funktionalanalysis unabhängig war und veröffentlichten eine rein funktionentheoretische Version.

Im Jahr 1989 schließlich gelang Weinstein [Wei] ein Beweis der MV ohne die Benutzung des Askey-Gasper Resultats.

1989	WEINSTEIN	alternativer Beweis des Satzes von de Branges

Weinsteins Beweis möchte ich hier etwas detaillierter darstellen, zum einen, weil er bestechend einfach ist, zum anderen, weil die Arbeit [Wei] schwer zugängig ist.

Er verwendet folgende Darstellung der partiellen Zeitableitungen der logarithmischen Koeffizienten $d_k(t)$ der Löwnerkette ($\zeta := re^{i\theta}$, $r \in (0,1)$)

$$
\begin{aligned}
\dot{d}_k(t) &\overset{\text{(Cauchyformel)}}{=\!=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\dot{f}(\zeta,t)}{f(\zeta,t)}\frac{d\theta}{\zeta^k} \\
&\overset{(0.6)}{=\!=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\zeta,t)\frac{\zeta f'(\zeta,t)}{f(\zeta,t)}\frac{d\theta}{\zeta^k} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\zeta,t)\left(1+\sum_{j=1}^{\infty} j d_j(t)\zeta^j\right)\frac{d\theta}{\zeta^k} \\
&= \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\zeta,t)\left(1+\sum_{j=1}^{\infty} j d_j(t)\zeta^j\right)\frac{d\theta}{\zeta^k}\,. \qquad (0.19)
\end{aligned}
$$

Sei nun $z \in \mathbb{D}$ und sei $\varphi(z,t) := k^{-1}\Big(e^{-t}k(z)\Big)$, gelte also

$$\frac{z}{(1-z)^2} = e^t\frac{\varphi}{(1-\varphi)^2} \quad (t \geq 0)\,. \qquad (0.20)$$

Die Abbildung φ ist eine spezielle Löwnerfamilie beschränkter schlichter Funktionen, deren Bildgebiet mit wachsendem t eine radial geschlitzte Einheitskreisscheibe mit wachsendem Schlitz ist. Ableiten der Identität

$$k(\varphi(z,t)) = e^{-t}k(z)$$

führt zu der Beziehung

$$\dot{\varphi} = -\varphi\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\,. \qquad (0.21)$$

Anstatt die MV für jedes einzelne $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, versucht Weinstein, den Beweis für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichzeitig zu führen, indem er eine erzeugende Funktion betrachtet. Wegen der Kompaktheit von S konvergiert die erzeugende Funktion der Milinschen Ausdrücke (0.13) absolut und lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$, und eine Umordnung ergibt

$$\omega(z) := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(\frac{4}{k}-k\,|d_k(0)|^2\right)\right)z^{n+1} = \frac{z}{(1-z)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k}-k\,|d_k(0)|^2\right)z^k.$$

Man beachte, daß auf diese Weise automatisch die Koebefunktion als Faktor entsteht! Mit (0.20) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich nun wegen $\varphi(z,\infty) = 0$ und $\varphi(z,0) = z$

$$\omega(z) = \int_0^{\infty} -\frac{e^t\varphi}{(1-\varphi)^2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k}-k\,|d_k(t)|^2\right)\varphi^k\right)dt\,.$$

Unter Benutzung der Beziehungen (0.19) und (0.21) erhält man dann nach einer Umformung ($\zeta := re^{i\theta}$, $r \in (0,1)$)

$$\omega(z) = \int_0^\infty \frac{e^t \varphi}{1-\varphi^2} \sum_{k=1}^\infty A_k(t) \varphi^k dt \; ,$$

wobei

$$A_k(t) := \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} p(\zeta, t) \left| 1 + 2 \sum_{j=1}^k j d_j(t) \zeta^j - k d_k(t) \zeta^k \right|^2 d\theta \; .$$

Schreiben wir nun

$$\frac{e^t \varphi^{k+1}}{1-\varphi^2} =: \sum_{n=1}^\infty B_{kn}(t) z^{n+1} \; ,$$

so ist schließlich

$$\omega(z) = \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^\infty B_{kn}(t) A_k(t) dt \right) z^{n+1} \; . \tag{0.22}$$

Die MV ist nun offenbar äquivalent zu der Tatsache, daß ω lauter nichtnegative Koeffizienten besitzt. Wegen $\operatorname{Re} p(\zeta, t) > 0$ (0.6) ist andererseits

$$A_k(t) \geq 0 \qquad (t \geq 0) \; ,$$

so daß die MV folgt, falls

$$B_{kn}(t) \geq 0 \qquad (t \geq 0, \quad k, n \in \mathbb{N}) \; . \tag{0.23}$$

Dies ist nun wiederum eine Positivitätsaussage spezieller reellwertiger Funktionen, welche allerdings mit der Koebefunktion und damit der Theorie der schlichten Funktionen in direktem Zusammenhang stehen.

Das Bildgebiet von $\varphi = k^{-1}(e^{-t}k)$ ist die auf der reellen Achse geschlitzte Einheitskreisscheibe. Beachtet man, daß die Abbildung ($\gamma \in \mathbb{R}$)

$$h_\gamma(z) := \frac{z}{1 - 2\cos\gamma \cdot z + z^2}$$

die Einheitskreisscheibe für $\gamma \neq 0 \pmod{\pi}$ auf eine mit zwei auf der reellen Achse liegenden Schlitzen versehene Ebene abbildet, kann man φ auch auffassen als Komposition $\varphi = h_\theta^{-1}(e^{-t} h_\gamma)$ für ein geeignetes Paar (θ, γ), und eine Rechnung zeigt, daß dann die Beziehung

$$\cos\gamma = (1 - e^{-t}) + e^{-t} \cos\theta \tag{0.24}$$

gilt. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} h_\gamma(z) &= e^t \cdot h_\theta(\varphi) = \frac{e^t\varphi}{1-\varphi^2}\left(\frac{1-\varphi^2}{1-2\cos\theta\cdot\varphi+\varphi^2}\right) \\ &= \frac{e^t\varphi}{1-\varphi^2}\mathrm{Re}\,\frac{1+e^{i\theta}\varphi}{1-e^{i\theta}\varphi} = \frac{e^t\varphi}{1-\varphi^2}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^k\cos k\theta\right) \\ &= \frac{e^t\varphi}{1-\varphi^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_{kn}(t)z^{n+1}\right)\cos k\theta\ . \end{aligned} \tag{0.25}$$

Es ist

$$\eta(z) := \frac{\sqrt{h_\gamma(z)}}{z} = \frac{1}{\sqrt{1-2\cos\gamma\cdot z+z^2}}$$

die erzeugende Funktion der Legendrepolynome, und es folgt aus (0.24) und dem Additionstheorem der Legendrepolynome eine explizite Darstellung der Form

$$\eta(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\nu_n^2 z^n + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\mu_{kn}^2 z^n\right)\cos k\theta$$

$$(\nu_n, \mu_{kn} \in \mathbb{R} \quad (k,n \in \mathbb{N}))$$

mit offensichtlich nichtnegativen Koeffizienten. Quadriert man dieses Ergebnis, sieht man mit (0.25), daß auch (0.23) und damit die MV erfüllt ist.

Weinsteins Beweis benutzt die dynamische Information der Löwnerschen Differentialgleichung in der Form (0.22), d. h. er beweist die Tatsache, daß sich die Milinschen Ausdrücke (0.13) als Zeitintegrale mit durchwegs nichtnegativen Integranden ausdrücken lassen.

Den Beweis der BV, der nunmehr vorliegt, hätte bereits Bieberbach bei der Formulierung seiner Vermutung nachvollziehen können. Seine Geschichte zeigte aber, daß nicht ein Forscher allein alle zum Beweis nötigen Ingredienzien zusammentrug, sondern das Puzzle wurde von vielen zusammengesetzt. Insbesondere

- die Einführung der Dynamik schlichter Funktionen und der beschreibenden Differentialgleichung durch Löwner,
- die Entdeckung der Relevanz gewichteter quadratischer Mittelwerte durch Robertson,
- die Exponentiation der logarithmischen Koeffizienten durch Lebedev und Milin
- sowie die systematische Untersuchung einer besonderen dynamischen Variante der MV durch de Branges

führten schließlich zum direkten Nachweis der MV durch Anwendung der speziellen von der Koebefunktion generierten Löwnerkette durch Weinstein.

Die BV hat seit ihrem Bestehen die Forschung im Bereich der geometrischen Funktionentheorie ungemein befruchtet und die bahnbrechende Entdeckung von de Branges hinterläßt eine von manchen Forschern schmerzlich vermißte Lücke. Die Geschichte dieser Vermutung aber ist ein Paradebeispiel der Entstehung mathematischen Wissens.

Als Referenzliteratur für den gesamten Aufsatz seien [Pom1], [Dur1], [Dur2], [Hen], ab S. 605, [Pom2] sowie [BDDM] empfohlen.

Literaturverzeichnis

[Aha] Aharonov, D.: On Bieberbach Eilenberg functions. Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 101–104.

[AG] Askey, R. und Gasper, G.: Positive Jacobi polynomial sums II. Amer. J. Math. **98** (1976), 709–737.

[BDDM] Baernstein, A., Drasin, D., Duren P. und Marden, A.: *The Bieberbach conjecture. Proceedings of the Symposium on the Occasion of the Proof.* Mathematical surveys and monographs **21**, American Mathematical Society, Providence, R. I. 1986

[Bie] Bieberbach, L.: Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. **38** (1916), 940–955.

[deBr] de Branges, L.: A proof of the Bieberbach conjecture. Acta Math. **154** (1985), 137–152.

[Bri] Brickman, L.: Extreme points of the set of univalent functions. Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 372–374.

[BMW] Brickman, L., MacGregor, T. H. und Wilken, D. R.: Convex hulls of some classical families of univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. **156** (1971), 91–107.

[Car1] Carathéodory, C.: Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. Math. Ann. **64** (1907), 95–115.

[Car2] Carathéodory, C.: Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. Rend. Circ. Mat. Palermo **32** (1911), 193–217.

[Car3] Carathéodory, C.: Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten. Math. Ann. **72** (1912), 107–144.

[CS] Charzyński, Z. und Schiffer, M.: A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. Arch. Rational Mech. Anal. **5** (1960), 187–193.

[Die] Dieudonné, J.: Sur les fonctions univalentes. C. R. Acad. Sci. Paris **192** (1931), 1148–1150.

[Dur1] Duren, P. L.: Coefficients of univalent functions. Bull. Amer. Math. Soc. **83**(1977), 891–911.

[Dur2] Duren, P. L.: *Univalent functions*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **259**, Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo.

[FS] Fekete, M. und Szegö, G.: Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen. J. London Math. Soc. **8** (1933), 85–89.

[Fitz] FitzGerald, C. H.: Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions. Arch. Rational Mech. Anal. **46** (1972), 356–368.

[FP] FitzGerald, C. H. und Pommerenke, Ch.: The de Branges Theorem on univalent functions. Trans. Amer. Math. Soc. **290** (1985), 683–690.

[Frie] Friedland, S.: On a conjecture of Robertson. Arch. Rational Mech. Anal. **37** (1970), 255–261.

[GS] Garabedian, P. R. und Schiffer, M.: A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. J. Rational Mech. Anal. **4** (1955), 427–465.

[Gro] Gronwall, T. H.: Some remarks on conformal representation. Ann. of Math. **16** (1914–1915), 72–76.

[Gru] Grunsky, H.: Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen. Math. Z. **45** (1939), 29–61.

[Ham] Hamilton, D. H.: Extremal boundary problems. Proc. London Math. Soc. (3) **56** (1988), 101–113.

[Hay] Hayman, W. K.: The asymptotic behaviour of p-valent functions. Proc. London Math. Soc. (3) **5** (1955), 257–284.

[HH] Hayman, W. K. und Hummel, J. A.: Coefficients of powers of univalent functions. Complex Variables **7** (1986), 51–70.

[Hen] Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 3: Discrete Fourier Analysis – Cauchy Integrals – Construction of Conformal maps – Univalent Functions*, John Wiley & Sons, New York, 1986.

[Hor] Horowitz, D.: A further refinement for coefficient estimates of univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc. **71** (1978), 217–221.

[Hum] Hummel, J. A.: A variational method for Gelfer functions. J. Analyse Math. **30**, (1976), 271–280.

[Koe1] Koebe, P.: Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Kl. 1907, 191–210.

[Koe2] Koebe, P.: Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Kl. 1909, 68–76.

[Koe3] Koebe, P.: Über eine neue Methode der konformen Abbildung und Uniformisierung. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Kl. 1912, 844–848.

[Koe4] Koepf, W.: On nonvanishing univalent functions with real coefficients, Math. Z. **192** (1986), 575–579

[Koe5] Koepf, W.: Extrempunkte und Stützpunkte in Familien nichtverschwindender schlichter Funktionen, Complex Variables **8** (1987), 153–171

[LM] Lebedev, N. A. und Milin, I. M.: An inequality. Vestnik Leningrad Univ. **20** (1965), Nr. 19, 157–158 (Russisch).

[Lee] Leeman, G. B.: The seventh coefficient of odd symmetric univalent functions. Duke Math. J. **43**(1976), 301-307

[Leu1] Leung, Y.: Successive coefficients of starlike functions. Bull. London Math. Soc. **10** (1978), 193–196.

[Leu2] Leung, Y.: Robertson's conjecture on the coefficients of close-to-convex functions. Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979), 89–94.

[Lit] Littlewood, J. E.: On inequalities in the theory of functions. Proc. London Math. Soc. (2) **23**(1925), 481–519.

[LP] Littlewood, J. E. und Paley, R. E. A. C.: A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients. J. London Math. Soc. **7** (1932), 167–169.

[Lö1] Löwner, K.: Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z| < 1$, die durch Funktionen mit nichtverschwindender Ableitung geliefert werden. S.-B. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig **69** (1917), 89–106.

[Lö2] Löwner, K.: Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I. Math. Ann. **89** (1923), 103–121.

[Mil1] Milin, I. M.: Estimation of coefficients of univalent functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR **160** (1965), 769–771 (Russisch) = Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 196–198.

[Mil2] Milin, I. M.: On the coefficients of univalent functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR **176** (1967), 1015–1018 (Russisch) = Soviet Math. Dokl. **8** (1967), 1255–1258.

[Mil3] Milin, I. M.: *Univalent functions and orthonormal systems.* Izdat. "Nauka", Moskau, 1971 (Russisch). Englische Übersetzung: Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1977.

[Mil4] Milin, I. M.: De Branges' Beweis der Bieberbachschen Vermutung (Russisch), Preprint (1984).

[Neh1] Nehari, Z.: On the coefficients of Bieberbach-Eilenberg functions. J. Analyse Math. **23**(1970), 297–303.

[Neh2] Nehari, Z.: A proof of $|a_4| \leq 4$ by Loewner's method. In: *Proceedings of the Symposium on Complex Analysis, Canterbury, 1973* (edited by J. Clunie and W. K. Hayman), London Math. Soc. Lecture Note Series **12**, Cambridge University Press, 1974, 107–110.

[Nev] Nevanlinna, R.: Über die konforme Abbildung von Sterngebieten. Översikt av Finska Vetenskaps-Soc. Förh. **63**(A), Nr. 6 (1920–1921), 1–21.

[Oza1] Ozawa, M.: On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. Kōdai Math. Sem. Rep. **21** (1969), 97–128.

[Oza2] Ozawa, M.: An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. Kōdai Math. Sem. Rep. **21** (1969), 129–132.

[Ped] Pederson, R. N.: A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. Arch. Rational. Mech. Anal. **31** (1968), 331–351.

[PS] Pederson, R. N. und Schiffer, M.: A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient. Arch. Rational. Mech. Anal. **45** (1972), 161–193.

[Pom1] Pommerenke, Ch.: Univalent functions. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen-Zürich, 1975.

[Pom2] Pommerenke, Ch.: The Bieberbach Conjecture. Mathematical Intelligencer **7** (2), 1985, 23–25.

[Rea] Reade, M. O.: On close-to-convex univalent functions. Mich. Math. J. **3**(1955), 59–62.

[Rob] Robertson, M. S.: On the theory of univalent functions. Ann. of Math. **37** (1936), 374–408.

[Rog] Rogosinski, W.: Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen. Math. Z. **35** (1932), 93–121.

[Schi] Schiffer, M.: A method of variation within the family of simple functions. Proc. London Math. Soc. **44** (1938), 432–449.

[Stu] Study, E.: *Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, 2. Heft: Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche*. Teubner-Verlag, Leipzig-Berlin, 1913.

[Wei] Weinstein, L.: The Bieberbach conjecture. Internat. Math. Res. Notices **5** (1991), 61–64.