

Algorithmen der Computeralgebra im Internet

Prof. Dr. Wolfram Koepf
Universität Kassel

koepf@mathematik.uni-kassel.de

<http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf>

DMV-Tagung 2004
Minisymposium *Mathematik und Internet*
16. September 2004

Suche im Internet

- Was finden wir, wenn wir im Internet nach dem Stichwort **Computeralgebra** suchen?
- Wir benutzen hierzu die Suchmaschine **Google**, welche vor kurzem an die Börse ging.
- Dort finden wir also u. a. die **Fachgruppe Computeralgebra** der DMV, GI und GAMM, deren Sprecher ich im Augenblick bin.

Fachgruppe Computeralgebra

- Unsere Homepage stellt Links zu den **Arbeitsgruppen in Deutschland** als auch zu den **entwickelten Computeralgebrasystemen (CAS)** bereit.
- Weitere Informationen über Computeralgebra sind in dem von uns zweimal jährlich herausgegebenen **Rundbrief** zu finden, der ebenfalls online verfügbar ist.
- Hier wird natürlich auch auf neuere **Algorithmen der Computeralgebra** eingegangen.
- **Online-Anmeldeformular**

Vortragsplan

- Im weiteren Verlauf dieses Vortrags werde ich exemplarisch Internetseiten vorstellen, auf welchen Algorithmen der Computeralgebra eingesetzt werden.
- Ich werde dann jeweils Beispiele für die Funktionalität der Internetseite vorführen.
- Schließlich gebe ich einen Einblick in die Funktionsweise der verwendeten Algorithmen.

Integrale

- Die Seite <http://www.integrals.com> wird von der Firma Wolfram Research angeboten, welche das General Purpose CAS *Mathematica* vertreibt.
- Die Seite stellt eine voll funktionsfähige Version von *Mathematicas Integrate* zur Verfügung.
- Berechnung der mittleren Länge eines Ortsvektors im Einheitswürfel $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$.

Bemerkungen und Funktionsweise

- Die letzte Funktion kann meines Wissens nur von *Mathematica* integriert werden. *Maple*, MuPAD und Reduce liefern keine Stammfunktionen.
- Obwohl für die Integration elementarer Funktionen ein Algorithmus existiert (**Risch-Algorithmus**), wird dieser von *Mathematica* nicht verwendet.
- *Mathematica* verwendet dagegen **Heuristiken**, welche auch algebraische Funktionen umfassen.

Abgespeckte CAS-Versionen

- Einige Hersteller von CAS erlauben Nutzern, abgespeckte Versionen Ihres CAS ins Netz zu stellen.
- Ein typisches Beispiel hierfür ist *WebMathematica*.
- Wir betrachten Beispiele aus dem *Ausbildungsbereich* und aus dem *Bereich Mathematik*.
- Ähnliche Tools existieren zu vielen anderen Bereichen wie *Physik, Chemie etc.*

Didaktische Materialien

- Schon bevor Maple seine **Maplets** erfand, hat die Arbeitsgruppe von Prof. Küchlin in Tübingen Maple-Applets entwickelt und Maplets genannt.
- Diese werden im Rahmen des Multimedia-Projektes MIN (Mathematik für Informatiker) eingesetzt.
- Wir sehen uns in **MIN** wiederum ein Integrationstool und ein Tool zur Interpolation von Punkten an.
- Test mit Maple

Didaktische Materialien

- Auch ich bin an einem Multimedialprojekt beteiligt, bei welchem es um die multimediale Begleitung eines **Mathematik-Vorkurses** an der Universität Kassel geht.
- Hierbei werden teilweise auch Computeralgebra-komponenten eingesetzt, zum Beispiel bei der **quadratischen Ergänzung**.
- Da die Studenten die Materialien erwerben und ggfs. zu Hause nutzen, verwenden wir aus lizenzrechtlichen Gründen keine kommerziellen Systeme.
- Vieles ist direkt in **Java** implementiert.

Inverse Symbolic Calculator

- Es gibt einige Internetseiten mit mathematischen Softwaretools, die hochinteressante Rechnungen durchführen.
- Wir verbinden uns mit dem **Inverse Symbolic Calculator** von Simon Plouffe.
- Die Rubrik **Simple Lookup and Browser** sieht in einer Datenbank nach, ob die unbekannte Dezimalzahl x verzeichnet ist. Sie funktioniert also wie ein inverses Telefonbuch.

Inverse Symbolic Calculator

- Die Rubrik **Smart Lookup** sieht ebenfalls in einer Datenbank nach, aber nicht nur nach der Unbekannten x , sondern auch nach $\ln x$, e^x , $\sin x$ etc.
- Die Rubrik **Generalized Expansions** berechnet die **Kettenbruchentwicklung** u. ä. der gegebenen Dezimalzahl x und versucht, die zugehörige **erzeugende Funktion** zu finden. Hierzu wird das Maple-Package **gfun** von Salvy und Zimmermann verwendet.

Inverse Symbolic Calculator

- Die Rubrik **Integer Relation Algorithms** testet, ob x eine **algebraische Zahl** ist mit einem ganzzahligen Minimalpolynom mit „kleinen“ Koeffizienten bzw. ob sie eine andere ganzzahlige Relation mit weiteren mathematischen Konstanten wie e , π etc. erfüllt.
- Hierzu wird der **PSLQ Integer Relation Algorithm** verwendet.
- Erfüllt $\ln(\pi\sqrt{2})$ wirklich die Gleichung $-8958 + 5291x + 480x^2 = 0$?

Ganzzahlige Folgen

- Das Buch *The Encyclopedia of Integer Sequences* von Neil Sloane und Simon Plouffe stellt eine riesige Datenbank ganzzahliger Folgen bereit. Auf diese kann zur Identifikation einer Folge auch im Internet zugegriffen werden: *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*
- Berechnung weiterer Folgenglieder für 1, 2, 3, 6, 11, 23, 47, 106, 235, ...
- Bereitstellung eines Beispiels: Die Zahlen $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

Berechnung orthogonaler Polynome

- Die klassischen orthogonalen Polynome lassen sich im sogenannten **Askey-Wilson-Schema** zusammenfassen.
- Auf die Definition der Familien des Askey-Wilson-Schemas kann man beim CAOP-Projekt (**Computer Algebra and Orthogonal Polynomials**) zugreifen.
- **CAOP** ermöglicht ferner die Online-Berechnung von Rekursionsgleichungen und Differentialgleichungen für die betrachteten Orthogonalsysteme.

Differentialgleichungen

- Von Manuel Bronstein wird dieses **Interface** zur Lösung holonomer Differentialgleichungen bis zur Ordnung 3 bereitgestellt.
- Wir lösen die Differentialgleichung

$$(1 - x^2) y''(x) + x y'(x) + 3 y(x) = 0$$

mit diesem Solver.

Differentialgleichungen

- Hier wird wieder **Maple** sowie das Programm **bernina** von Bronstein verwendet.
- Die Differentialgleichung wird **faktoriert**, und es werden die **Invarianten ihrer Galoisgruppe** berechnet. Daraus folgt die Entscheidung, ob die Differentialgleichung **Liouvillesche Lösungen** besitzt.
- Für die angegebene Fragestellung ist das Applet weiter fortgeschritten als alle auf dem Markt befindlichen CAS.

Abschließende Bemerkungen

- Ich hoffe, es ist mir gelungen, Ihnen einige interessante Internetseiten vorzuführen.
- Man konnte sehen: Computeralgebraische Methoden kann man an vielen Stellen des Internets finden.
- Vielleicht sind Sie aber trotzdem auch an gedruckter Information über Computeralgebra interessiert und füllen den Anmeldebogen der Fachgruppe Computeralgebra aus?
- Ich würde Sie gerne herzlich als Mitglied begrüßen!